ASUPRA GRUPULUI MULTIPLICATIV
AL BUCLELOR MEDII BOL

Ion GRECU

O buclă $(Q,\cdot)$ se numește buclă medie Bol, dacă satisface identitatea

$$x\ yz\backslash x\ = (x/z)(y\backslash x), \qquad (1)$$

unde „\”, („/”) este împărțirea la dreapta (respectiv la stânga) în bucla $(Q,\cdot)$.

Din [1] este cunoscut că identitatea (1) este invariantă la izotopia buclelor, adică este universală, și că identitatea (1) este o condiție necesară și suficientă pentru ca proprietatea $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ să fie univesală. Bucla care satisface identitatea $xy \cdot z\ y = x(yz \cdot y)$ (respectiv, $y\ z \cdot yx\ = (y \cdot zy)x$) se numește buclă Bol la dreapta (respectiv, la stânga). Teoria buclelor Bol la dreapta (stânga) este elaborată, de exemplu în [1-4].

A.Gvaramija a demonstrat în [5] că o buclă $(Q,\circ)$ este medie Bol, dacă și numai dacă există o buclă Bol la dreapta astfel încât

$$x \circ y = (y \cdot xy^{-1})y, \qquad (2)$$

pentru orice $x, y \in Q$. Din (2) rezultă că $y \cdot x\ \circ y^{-1} = \ y^{-1} \cdot\ yx \cdot y\ \ \cdot y^{-1} = xy \cdot y^{-1} = x$, pentru orice $x, y \in Q$, de unde rezultă că

$$y \cdot x = x//y^{-1}, \qquad (3)$$

pentru orice $x, y \in Q$, unde “$//$” este împărțirea la stânga în $(Q,\circ)$. Pe de altă parte, dacă notăm în (3) $y \cdot x$ prin z , atunci obținem: $z = (y\backslash z)//y^{-1} \Leftrightarrow z \circ y^{-1} = y\backslash z$, deci

$$z \circ y = y^{-1}\backslash z, \qquad (4)$$

pentru orice $x, y \in Q$. Din egalitățile (3) și (4) rezultă că buclele $(Q,\cdot)$ și $(Q,\circ)$ sunt izostrofe.

De asemenea, în [5] se demonstrează că o buclă $(Q,\circ)$ este medie Bol, dacă și numai dacă există o buclă Bol la stânga $(Q,\cdot)$, astfel încât

$$x \circ y = y(y^{-1}x \cdot y) \qquad (5)$$

pentru orice $x, y \in Q$. Din (5) se obțin egalitățile:

$x \cdot y = x//y^{-1}$,

$x \circ y = x/y^{-1}$,

pentru orice $x, y \in Q$. În [6] se demonstrează că buclelor Bol la stânga (la dreapta) izotope le corespund bucle medii Bol izotope.

Fie $(Q,\cdot)$ un quasigrup. Notăm prin $L_a^{(\cdot)}$ (resp., $R_a^{(\cdot)}$) translația la stânga (resp., la dreapta) cu elemental a în $(Q,\cdot)$. În continuare, vom utiliza și notațiile:

$LM(Q,\cdot) = \langle L_x | x \in Q \rangle$ – grupul multiplicativ la stânga al $(Q,\cdot)$,

$RM(Q,\cdot) = \langle R_x | x \in Q \rangle$ – grupul multiplicativ la dreapta al $(Q,\cdot)$,

$M(Q,\cdot) = \langle L_x, R_x | x \in Q \rangle$ – grupul multiplicativ al $(Q,\cdot)$,

unde $L_a^{(\cdot)}(y) = a \cdot y$, $R_a^{(\cdot)}(y) = y \cdot a, \forall a, y \in Q$.

Fie $(Q,\cdot)$ un quasigrup, $h \in Q$. Mulțimea

$$M(Q,\cdot)_h = \{\varphi \in M(Q,\cdot) | \varphi(h) = h\},$$

adică stabilizatorul lui h în $M(Q,\cdot)$, se numește grupul substituțiilor interne, în raport cu h, al quasigrupului $(Q,\cdot)$, și se notează cu $I_h^{(\cdot)}$. Vom nota cu $RM(Q,\cdot)_h = \{\varphi \in RM(Q,\cdot) | \varphi(h) = h\}$ stabilizatorul lui h în $RM(Q,\cdot)$ și cu $LM_h^{(\cdot)} = \{\varphi \in LM(Q,\cdot) | \varphi(h) = h\}$ stabilizatorul lui h în $LM(Q,\cdot)$.

Propoziția 1. Fie $(Q,\cdot)$ un quasigroup, $h \in Q$ și $\varphi, \psi \in S_Q$. Dacă $(Q,\circ)$ este un izostrof al lui $(Q,\cdot)$, dat de izostrofia $x \circ y = \psi(y) \backslash \varphi(x)$, $\forall x, y \in Q$, atunci $RM(Q,\circ)_h = RM(Q,\circ) \cap LM(Q,\cdot)_h$.

Corolarul 1. Dacă $(Q,\cdot)$ este o buclă Bol la dreapta și $(Q,\circ)$ este bucla medie Bol corespunzătoare buclei $(Q,\cdot)$ atunci, pentru $\forall h \in Q$, are loc următoarea egalitate $RM(Q,\circ)_h = LM(Q,\cdot)_h$.

Propoziția 2. Fie $(Q,\cdot)$ un quasigroup, $h \in Q$ și $\varphi, \psi \in S_Q$. Dacă $(Q,\circ)$ este un izostrof al lui $(Q,\cdot)$, dat de izostrofia $x \circ y = \varphi(x) / \psi(y)$, $\forall x, y \in Q$, atunci $RM(Q,\circ)_h = RM(Q,\circ) \cap RM(Q,\cdot)_h$.

Corolarul 2. Dacă $(Q,\cdot)$ o buclă Bol la stânga și $(Q,\circ)$ este bucla medie Bol corespunzătoare buclei $(Q,\cdot)$, atunci, pentru $\forall h \in Q$, are loc următoarea egalitate $RM(Q,\circ)_h = RM(Q,\cdot)_h$.

Propoziția 3. Fie $(Q,\cdot)$ un quasigroup, $h \in Q$ și $\varphi, \psi \in S_Q$. Dacă $(Q,\circ)$ este un izostrof al lui $(Q,\cdot)$, dat de izostrofia $x \circ y = \varphi(x) \backslash \psi(y)$, $\forall x, y \in Q$, atunci $LM(Q,\circ)_h = LM(Q,\circ) \cap LM(Q,\cdot)_h$.

Propoziție 4. Fie $(Q,\cdot)$ un quasigroup, $h \in Q$ și $\varphi, \psi \in S_Q$. Dacă $(Q,\circ)$ este un izostrof al $(Q,\cdot)$ dat de izostrofia $\circ y = \psi(y) / \varphi(x)$, $\forall x, y \in Q$, atunci $LM(Q,\circ)_h = LM(Q,\circ) \cap RM(Q,\cdot)_h$.

Referințe:

1. BELOUSOV, V. *Foundations of the theory of quasigroups and loops.* Moscow: Nauka, 1967.
2. ROBINSON, D.A. *Bol loops* / PhD thesis, University of Wisconsin, 1964.
3. PLUGFELDER, H.O. *Quasigroups and Loops: Introduction*. Sigma Series in Pure. Mathematics, Heldermann, 1990.
4. NAGY, G. A class of simple proper Bol loops. In: *Manuscripta Math*. 2008, nr. 1(127), p.81-88.
5. GWARAMIJA, V. On a class of loops. In: Uch. Zaiski MGPI, 1971, v. 378, p.23-34.

6. GRECU, I., SYRBU, P. On some isostrophy invariants of Bol loops. In: *Bull. Transylv. Univ. Braşov*, Ser. C, 2012, vol. 5(54), p. 145-154.