МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РИСКА В ОПЕРАЦИЯХ СТРАХОВАНИЯ И ПЕРЕСТРАХОВАНИЯ

Андрей МУЛИК,
Др. конф., унив., департамент «Финансы и банки»
Кирилл ГАВЛИЦКИЙ,
докторант факультета «Экономические науки»

ABSTRACT: An actuarial risk model is a mathematical description of the behavior of a collection of risks generated by an insurance portfolio. It is not intended to replace sound actuarial judgment. In fact, a well formulated model is consistent with and adds to intuition, but cannot and should not replace experience and insight. Even though we cannot hope to identify all influential factors relevant to future claims, we can try to specify the most important.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: моделирование, модель страхового риска, процесс Пуассона, риск, страховой портфель.

Модель актуарного риска представляет собой математическое описание поведения совокупности рисков, создаваемых страховым портфелем. Она не предназначена для замены актуарного решения разрабатываемого менеджером страховой компании. На самом деле хорошо сформулированная модель согласуется с интуицией менеджера и добавляет ее, но не может и не должна заменять опыт специалистов в области страхования и понимание финансово-экономической ситуации.

Несмотря на то, что мы не можем выявить все факторы имеющие отношение к будущим актуарным расчётам, которые влияют на результативный показатель, мы можем попытаться учесть наиболее важные.

Типичная модель страхового риска, так называемая модель коллективного риска, имеет два основных компонента: один, характеризующий частоту (или частоту) событий, а другой характеризующий размер (или сумму) прибыли или убытка, возникающей в результате возникновения страхового случая.

Модель коллективного риска часто используется в медицинском и общем страховании, когда основными компонентами риска являются количество страховых требований и сумма требований. Он также может использоваться для моделирования других рисков не страхового продукта, таких как кредитный и операционный риск (Embrechts, Kaufmann, Samorodnitsky, 2004).

В первом случае, например, основными компонентами риска являются количество кредитных событий (дефолты или понижения) и сумма, потерянная в результате кредитного события.

Стохастический характер, как частоты, так и денежного выражения требований является фундаментальными компонентами реалистической модели. Следовательно, в классической форме модель страхового риска определяется следующим образом:

Если (Ω, F, P) - вероятностное пространство, несущее (i) точечный процесс {Nt} t ≥ 0, т. е. целочисленный стохастический процесс с $N_0 = 0$ при $N_t < \infty$ для каждого t < ∞ и неубывающих реализаций, и (ii) независимая последовательность $\{Xk\}_{k=1}^{\infty}$ положительных независимых и одинаково распределенных случайных величин, то процесс риска {Rt} t ≥ 0 задается формулой:

$$R_t = u + c(t) - \sum_{i=1}^{Nt} X_i \quad (1)$$

Неотрицательное постоянное значение ***uu*** означает начальный капитал страховой компании. Компания продает страховые полисы и получает премию равную c(t). В классической модели ***c*** постоянна, но в более общей конфигурации она может быть детерминированной или даже стохастической функцией времени. Финансовые претензии формируют совокупную потерю суммы страховых претензий $\{\sum_{t=1}^{Nt} X_i\}$. Сумма претензий описывается случайной последовательностью $\{X_k\}$, а число претензий в интервале (0, t) моделируется точечным процессом N_t, часто называемым процессом получения заявки на возмещения страховой суммы.

Моделирование процесса суммарной потери состоит в моделировании точечного процесса $\{N_t\}$ и последовательности размеров претензий $\{X_k\}$. Оба процесса обычно считаются независимыми, поэтому их можно рассматривать независимо друг от друга. В данном исследовании основное внимание уделяется моделированию процесса получения заявки $\{N_t\}$.

Далее рассмотрим эффективные алгоритмы для пяти классов процесса поступления в страховую компанию заявки на возмещение финансовых убытков.

Важно отметить, что выбор модели влияет как на вероятность банкротства, так и на стратегию перестрахования компании, поэтому отбор должен производиться с большой осторожностью.

Рассмотрим методику эффективного моделирования процесса поступления в страховую компанию заявки на возмещение финансовых убытков $\{N_t\}$. Этот процесс можно моделировать либо через время прибытия $\{T_i\}$, т. е. моменты, когда происходит i-я претензия, или время взаимного прихода (или время ожидания)

$W_i = T_i - T_{i-1}$ то есть периоды времени между последовательными пунктами.

Заметим, что в значениях $W_i W_i$, процесс точки прибытия заявки определяется как $N_t = \sum_{n=1}^{\infty} I\ (T_n \leq t)$. В качестве примера в дальнейших исследованиях необходимо рассмотреть некоторые ситуации по показателю $\{N_t\}$, а именно классовый (однородный) пуассоновский процесс, неоднородный пуассоновский процесс, смешанный пуассоновский процесс, процесс Кокса (также называемый дважды стохастическим пуассоновским процессом) и процесс обновления.

В рамках данного исследования остановимся на рассмотрении однородного пуассоновского процесса. Наиболее распространенным и наиболее известным процессом прибытия точки прихода является гомогенный пуассоновский процесс (ГПС) со стационарными и независимыми приращениями и число претензий в заданный временной интервал, определяемый законом Пуассона. Хотя этот процесс, как правило, подходит в связи с моделированием в области страхования жизни, он часто страдает от недостатка обеспечения недостаточной пригодности к страховым данным в других областях страхования. В частности, он имеет тенденцию занижать истинную изменчивость, присущую этим ситуациям.

Формально непрерывный стохастический процесс $\{N_t$: t ≥ 0} является (однородным) пуассоновским процессом с интенсивностью (или скоростью) λ > 0, если (i) $\{N_t\}$ - точечный процесс и (ii) время ожидания W_i независимы и тождественно распределены, а также следуют экспоненциальному закону с интенсивностью λ, т. е. со средним 1 / λ (в соответствии со свойствами и схемами моделирования применяемыми для экспоненциального распределения). Это определение, естественно, приводит к симуляционной схеме для последовательных времен прихода T_1, T_2,..., T_n процесса Пуассона:

<u>Алгоритм ГПС 1:</u>

Шаг 1: установите T_0 = 0

Шаг 2: для i = 1, 2, ..., n, далее перейти к:

Шагу 2a: сформировать экспоненциальную случайную величину E с интенсивностью λ.

Шаг 2б: определить $T_i = T_{i-1}$ + E

Альтернативно, гомогенный процесс Пуассона можно моделировать, применяя следующее свойство (Rolski et al., 1999). Учитывая, что N_t = n, n случаев времени T \, T2, ..., Tn имеют те же распределения, что и статистика порядка, соответствующая n i.i.d. случайные величины, равномерно распределенные на промежутке (0, t]. Следовательно, времена прихода ГПС на интервал (0, t] могут быть сгенерированы следующим образом:

Алгоритм ГПС 2:

Шаг 1: сформировать пуассоновскую случайную величину N с интенсивностью λ.

Шаг 2: генерируем N случайных величин U_i, равномерно распределенных на (0,1), т.е. U_i $U_i \sim U\,(0,1)$, i = 1, 2, ..., N

Шаг 3: задаем величины (T_1, T_2, ..., T_τ) = t * sort [U_1, U_2, ..., U_n}

В общем, этот алгоритм будет работать быстрее, чем предыдущий, поскольку он не включает цикл. Единственные две присущие числовые трудности связаны с генерированием случайной величины Пуассона и сортировкой вектора времени возникновения. В то время как последняя проблема может быть решена с помощью стандартного алгоритма быстрой сортировки, первое требует большего внимания.

Простым алгоритмом будет N = min {n: U_1 *...*U_n < exp (-λ)} - 1, что является следствием свойств пуассоновского процесса.

Однако для больших λ использование этого метода может очень замедлить осуществление необходимых вычислений.

Более быстрые, но более сложные методы были предложены в научной литературе авторами Аренс и Дитер (Ahrens and Dieter, 1982).

Данные учёные предложили генератор, который использует приемочное дополнение с усеченными нормальными вариациями всякий раз, когда λ > 10, и наоборот обращается к табличной инверсии.

Американский исследователь Stadlober (1989) адаптировал отношение метода формы для λ > 5 и классической инверсии для малых. А. Хорманн (1993) выступал за преобразованный метод отторжения, который представляет собой комбинацию алгоритмов инверсии и отторжения.

Образцы траекторий однородных и неоднородных пуассоновских процессов изображены на рисунке .1 Пунктирная зеленая линия представляет собой ГПС с интенсивностью λ = 1 (левая панель) и λ = 10 (правая панель). Ясно, что последнее значение чаще изменяется. Поскольку для ГПС ожидаемое значение E (N_t) = λt, естественно определит функцию премии в этом случае как c (t) = ct, где c = (1 + θ) μλ, p = E (X_k)) и θ > 0 – о тносительная безопасная нагрузка, которая «гарантирует» выживание страховой компании. При таком выборе функции премии мы получаем классическую форму процесса риска.

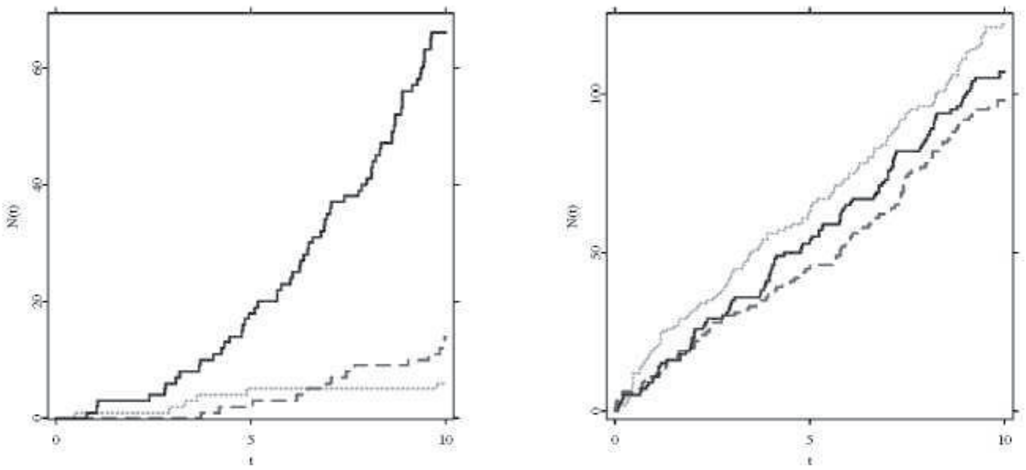

Рисунок 1: Левая панель: траектории выборки NГПС с линейной интенсивностью λ (t) = a + b * t для a = 1 и b = 1 (сплошная линия), b = 0,1 (пунктирная штрих-линия) и b = 0 (точечная пунктирная линия). Обратите внимание, что последнее на самом деле является ГПС. Правая панель: Образцы траекторий NГПС с периодической интенсивностью λ (t) = a + b * cos (2πt) для a = 10 и b = 10 (сплошная линия), b = 1 (пунктирная штрих-линия) и b = 0 (точечная пунктирная линия). Опять же, последняя является ГПС.

Выводы:

Простота процесса динамики страхового риска при более детальном рассмотрении оказывается гораздо более сложным явлением. В большинстве случаев, невозможно сделать, аналитические выводы относительно временной эволюции данного процесса. Однако именно эта эволюция важна для практиков, которые должны рассматривать функциональное развитие процесса риска и вычислять такие показатели, как: ожидаемое время банкротства и вероятность несостоятельности страховой компании. Все это требует применения схем численного моделирования.

Библиография:

1. Pavel Cížek, Wolfgang Härdle, Rafał Weron «Statistical Tools for Finance and Insurance» Springer Berlin Heidelberg New York, ISBN 3-540-22189-1
2. Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих рассчетов. Москва., 1995.