ASUPRA UNIVERSALITĂȚII UNOR IDENTITĂȚI ÎN BUCLE

Ianna TCACI, Facultatea de Matematică și Informatică

În lucrarea prezentă, sunt studiate criterii de universalitate a proprietăților: legea alternativă la stânga (resp. la dreapta), legea cheilor la stânga (resp. la dreapta), sunt construite exemple și sunt demonstrate proprietăți ale buclelor cu alternativitate, respectiv cu legea cheilor, universale.

Definiţia 1. *Grupoidul $Q(\cdot)$ se numeşte* ***quasigrup,*** *dacă, pentru $\forall a, b \in Q$, ecuaţiile $a \cdot x = b, y \cdot a = b$ au câte o soluţie unică în Q.* Quasigrupul $Q(\cdot)$ se numeşte **buclă**, dacă există un element $e \in Q$ cu proprietatea: $a \cdot e = e \cdot a = a$, $\forall a \in Q$.

Notăm cu "$\backslash$" (resp. "$/$") împărțirea la dreapta (resp. la stânga) în quasigrupul $Q(\cdot)$.

Definiţia 2. *Fie A şi B două operaţii de quasigrup definite pe Q. Operaţia B se numeşte* ***izotop*** *al operaţiei A, dacă există trei substituţii $\alpha, \beta, \gamma \in S_Q$, astfel încât: $B(x, y) = \gamma^{-1}A(\alpha x, \beta y)$, $\forall\, x, y \in Q$, unde S_Q este grupul simetric pe mulţimea Q.*

În acest caz, tripletul $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ se numeşte ***izotopie.*** Notăm: $B = A^T$ sau $B = A^{(\alpha,\beta,\gamma)}$. *Izotopia de forma $T = (R_a^{-1}, L_b^{-1}, \varepsilon)$, unde ε este substituția identică pe Q, R_a este translația la dreapta cu elementul a, iar L_b este translația la stânga cu b în bucla $Q(\cdot)$, se numeşte LP-**izotopie.***

Definiţia 3. *Quasigrupul $Q(\cdot)$ se numeşte* ***RIP-quasigrup****, dacă există o aplicaţie bijectivă $\rho: Q \to Q$, astfel încât $yx \cdot \rho x = y, \forall x, y \in Q$. Quasigrupul $Q(\cdot)$ se numeşte* ***LIP-quasigrup*** *dacă există o aplicaţie bijectivă $\lambda: Q \to Q$, astfel încât $\lambda x \cdot xy = y, \forall x, y \in Q$. Dacă $Q(\cdot)$ este în acelaşi timp RIP- şi LIP-quasigrup, atunci el se numeşte* ***IP-quasigrup.***

O problemă importantă în Teoria Quasigrupurilor şi a Buclelor este identificarea proprietăţilor, în particular a identităţilor, invariante la izotopie. O proprietate P este universală în bucla Q(·), dacă Q(·) și orice buclă izotopă cu ea verifică P.

Universalitatea legii asociative $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ a fost demonstrată în anii 50, sec. XX de savantul american Albert [1]. Proprietatea LIP (resp. RIP) este universală în bucla Q(·), dacă și numai dacă Q(·) este Bol la stânga (resp. la dreapta). Proprietatea IP este universală în bucla Q(·), dacă și numai dacă Q(·) este o buclă Moufang [1, 2]. Universalitatea legii flexibilității $x \cdot yx = xy \cdot x$ a fost studiată în [3, 4].

Definiţia 4. *Spunem că un quasigrup $Q(\cdot)$ este alternativ la stânga, (resp. la dreapta), dacă $Q(\cdot)$ verifică identitatea $x \cdot xy = x^2y$, (resp. $yx \cdot x = yx^2$).*

Teoremă 1. *Legea alternativă la stânga este universală în bucla $Q(\cdot)$, dacă și numai dacă bucla primitivă $Q(\cdot,/,\backslash)$ verifică identitatea $x \cdot [b \backslash (x \cdot y)] = \{[x \cdot (b \backslash (x \cdot a))] / a\} \cdot y$.*

Demonstrație. Fie că bucla $Q(\cdot)$ verifică identitatea $x \cdot xy = x^2y$. Legea alternativă la stânga este universală în $Q(\cdot)$, dacă și numai dacă orice LP-izotop al lui $Q(\cdot)$ verifică această identitate. Fie $Q(\circ)$ un LP-izotop al lui $Q(\cdot)$. Atunci $\exists$ a, b$\in Q : (\circ) = (\cdot)^{(R_a^{-1}, L_b^{-1}, \varepsilon)}$, deci $x \circ y = R_a^{-1}(x) \cdot L_b^{-1}(y), \forall\, x, y \in Q$, ce este echivalentă cu $R_a(x) \circ L_b(y) = x \cdot y$, dacă înlocuim: $x \to R_a(x)$ și $y \to L_b(y)$. Legea alternativă la stânga e universală în $Q(\cdot)$, dacă și numai dacă LP-izotopul arbitrar $Q(\circ)$ verifică $x \circ (x \circ y) = (x \circ x) \circ y, \forall\, x, y \in Q$. Trecem în ultimă egalitate la operația $(\cdot)$:

$$R_a^{-1}(x) \cdot L_b^{-1}\big(R_a^{-1}(x) \cdot L_b^{-1}(y)\big) = R_a^{-1}\big(R_a^{-1}(x) \cdot L_b^{-1}(x)\big) \cdot L_b^{-1}(y). \quad (1)$$

Substituind în (1) $x \to R_a(x)$ și $y \to L_b(y)$, obținem: $x \cdot L_b^{-1}(x \cdot y) = R_a^{-1}\left(x \cdot L_b^{-1}\big(R_a(x)\big)\right) \cdot y$, de unde rezultă: $x \cdot L_b^{-1}(x \cdot y) = R_a^{-1}\big(x \cdot L_b^{-1}(x \cdot a)\big) \cdot y$. Utilizând egalitățile $R_a^{-1}(x) = x / a$, $L_b^{-1}(x) = b \setminus x$ ultima identitate ia forma: $x \cdot [b \setminus (x \cdot y)] = \{[x \cdot (b \setminus (x \cdot a))] \,/\, a\} \cdot y$. ■

Analogic se demonstrează teorema.

Teorema 2. *Legea alternativă la dreapta este universală în bucla $Q(\cdot)$, dacă și numai dacă bucla primitivă $Q(\cdot, /, \backslash)$ verifică identitatea $[(y \cdot x) \,/\, a] \cdot x = y \cdot \{b \setminus [((b \cdot x) \,/\, a) \cdot x]\}$*

Propoziția 1. *Orice buclă cu alternivitate universală la stânga este o LIP-buclă.*

Demonstrație. În orice buclă $\exists\, e \in Q : e \cdot x = x \cdot e = x, \forall\, x \in Q$. Din aceste egalități rezultă că există x^{-1} și ${}^{-1}x$ în Q, astfel încât: ${}^{-1}x \cdot x = e$ și $x \cdot x^{-1} = e$. Dacă în egalitatea $x \cdot [b \setminus (x \cdot y)] = \{[x \cdot (b \setminus (x \cdot a))] \,/\, a\} \cdot y$, luăm $x = e$, obținem $b \setminus y = [(b \setminus a) \,/\, a] \cdot y$. Substituind $y \to by$ și $a \to b$ în ultima egalitate, avem $y = {}^{-1}b \cdot by, \forall\, b, y \in Q$, deci Q este o LIP-buclă. ■

Propoziția 2. *Orice buclă cu alternivitate universală la dreapta este o RIP-buclă.*

Exemple de bucle cu legea alternativă la stânga universală sunt $\mathbb{Z}_2^3(\cdot)$ și $\mathbb{Z}_2^3(\circ)$, unde $(i, j, k) \cdot (p, q, r,) \stackrel{\text{def}}{=} (i + p, j + q, k + r + ijp + ijq)$ și *$(i, j, k) \circ (p, q, r,) \stackrel{\text{def}}{=} (i + p, j + q, k + r + ijp)$.*

Teorema 3. Legea cheilor la stânga $x \cdot xy = y$ *(la dreapta $yx \cdot x = y$) este universală în bucla Q(·), dacă și numai dacă Q(·) este un grup abelian.*

Propoziția 3. Bucla *Q(·) ce verifică identitatea $x \cdot xy = y$ este o LIP-buclă.*

Propoziția 4. *Un grup Q(·) verifică identitatea $x \cdot xy = y$ dacă și numai dacă $x^2 = e$.* Exemple de grupuri abeliene ce verifice identitatea $x \cdot xy = y$ sunt grupurile $(\mathbb{Z}_2^n, *), \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Referințe:

1. БЕЛОУСОВ, В. *Основы теории квазигрупп и луп.* Москва: Наука, 1967.
2. ФЛОРЯ, И. Лупы с односторонней обратимостью. *Изв. АН МССР.* 1965, с.68-79.
3. SYRBU, P. On loops with universal elasticity. *Quasigroups and Related Systems.*3(1996),41-54.
4. SYRBU, P. On loops with universal elasticity. *Quasigroups and Related Systems.*1(1994),57-65.

Recomandat
Parascovia SÂRBU, dr.,conf. univ.