COMPORTAREA ÎN TIMP A SOLUŢIILOR PROBLEMEI CAUCHY PENTRU ECUAŢII DIFERENŢIALE ABSTRACTE DE ORDINUL AL DOILEA

Doiniţa MUNTEANU, Facultatea de Matematică şi Informatică

In this paper the large-time behavior of solutions to the Cauchy problem for abstract differential equations of second order with positive definite operator in a real Hilbert space is studied. It is obtained that the solutions to the considered problem tend to solution to the associated Cauchy problem for first order differential equation, as $t \to +\infty$.

Scopul lucrării este studierea comportării în timp a soluţiilor problemei Cauchy pentru ecuaţia diferenţială abstractă de ordinul al doilea:

$$\begin{cases} u''(t) + \delta u'(t) + Au(t) = f(t), \quad t > 0, \ \delta > 0, \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \end{cases} \tag{1}$$

în raport cu soluţiile problemei asociate:

$$\begin{cases} \delta v'(t) + Av(t) = f(t), \quad t > 0, \ \delta > 0, \\ v(0) = v_0, \end{cases} \tag{2}$$

într-un spaţiu Hilbert H, de produs scalar $(\cdot,\cdot)$ şi normă $\|\cdot\|$, unde $f: [0, \infty) \to H, v_0, u_0, u_1 \in H$.

Ideea de a studia relaţia dintre soluţiile acestor probleme provine din unele constatări despre comportarea soluţiilor unor ecuaţii diferenţiale mai simple, cum ar fi, de exemplu, problema Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + 6y'(x) + 25y(x) = 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = 1, \end{cases}$$

şi problema asociată ei:

$$\begin{cases} 6v'(x) + 25v(x) = 0, \\ v(0) = 1, \end{cases}$$

pentru care destul de simplu se demonstrează că diferenţa $y(x) - v(x) \to 0$, atunci când $x \to +\infty$, unde $y(x) = e^{-3x}cos(4x) + e^{-3x}sin(4x)$ şi $v(x) = e^{-\frac{25}{6}x}$.

Firesc ne întrebăm dacă această proprietate este valabilă şi pentru cazul abstract. Răspunsul se adevereşte a fi unul pozitiv.

Într-adevăr, dacă asupra spaţiului Hilbert H şi a operatorului A sunt impuse următoarele restricţii:

(IH) H este spaţiu Hilbert real şi separabil;

(IA) Operatorul $A: D(A) \subset H \to H$ este pozitiv definit şi posedă spectru discret, atunci sunt valabile următoarele teoreme:

Teorema 1. Presupunem că spaţiul H şi operatorul A verifică condiţiile **(**IH) şi (IA), $v_0 \in H$ şi $f \in C([0,\infty); H)$.

Atunci problema (2) are o soluţie slabă unică de forma:

$$v(t) = \sum_{j=1}^{\infty} (v_0, \omega_j) e^{-\frac{\lambda_j}{\delta} t} \omega_j + \frac{1}{\delta} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_0^1 f_j(\tau)\, e^{-\frac{\lambda_j}{\delta}(t-\tau)} d\tau \right) \omega_j,$$

unde λ_j sunt valorile proprii ale operatorului A [1].

Teorema 2. Presupunem că spaţiul H şi operatorul A verifică condiţiile (IH) şi (IA), $u_0, u_1 \in H$ şi $f \in C^1([0,\infty); H$.

Atunci problema (1) are o soluţie slabă unică de forma:

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_j - \frac{\delta^2}{4}}} \int_0^t e^{-\frac{\delta}{2}(t-\tau)} f_j(\tau) \sin\left(\sqrt{\lambda_j - \frac{\delta^2}{4}} (t - \tau) \right) d\tau \right) \omega_j$$
$$+ \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{\delta}{2} t} \cos\left(\sqrt{\lambda_j - \frac{\delta^2}{4}}\, t \right) (u_0, \omega_j) \omega_j$$
$$+ \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{\delta}{2} t} \sin\left(\sqrt{\lambda_j - \frac{\delta^2}{4}}\, t \right) \frac{(u_1, \omega_j) + \frac{\delta}{2}(u_0, \omega_j)}{\sqrt{\lambda_j - \frac{\delta^2}{4}}} \omega_j.$$

Teorema este valabilă pentru cazul în care expresia de sub radical, $\lambda_j - \frac{\delta^2}{4}$, este pozitivă [1].

Rezultatul principal al acestui studiu este reflectat în următoarea teoremă:

Teorema 3. Presupunem că spaţiul H şi operatorul A verifică condiţiile (IH) şi (IA), v_0, $u_0, u_1 \in H$ şi $f \in C^1([0,\infty); H)$. Atunci

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t) - v(t)\| = 0,$$

unde u şi v sunt soluţiile problemelor Cauchy (1) şi (2) respectiv.

Pentru demonstraţia acestei teoreme, au fost utilizate proprietăţile spaţiului H şi ale operatorului A. Bazându-ne pe acestea, a fost evaluat pătratul normei diferenţei soluţiilor problemelor respective.

S-a obţinut următoarea inegalitate:

$$\|u(t)-v(t)\|^2 \le 5\left[\sum_{j=1}^{\infty} T_{1j}^2(t)+\sum_{j=1}^{\infty} T_{2j}^2(t)+\sum_{j=1}^{\infty} T_{3j}^2(t)+\sum_{j=1}^{\infty} T_{4j}^2(t)+\sum_{j=1}^{\infty} T_{5j}^2(t)\right],$$

unde

$$\sum_{j=1}^{\infty} T_{1j}^2(t)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_j-\frac{\delta^2}{4}}}\int_0^t e^{-\frac{\delta}{2}(t-\tau)} f_j(\tau)\sin\left(\sqrt{\lambda_j-\frac{\delta^2}{4}}(t-\tau)\right)d\tau\right);$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} T_{2j}^2(t)=\frac{1}{\delta^2}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int_0^1 f_j(\tau)\, e^{-\frac{\lambda_j}{\delta}(t-\tau)}d\tau\right)^2;$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} T_{3j}^2(t)=\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\delta t}\, cos^2\left(\sqrt{\lambda_j-\frac{\delta^2}{4}}t\right)\left|\left(u_0,\omega_j\right)\right|^2;$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} T_{4j}^2(t)=\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\delta t}\, sin^2\left(\sqrt{\lambda_j-\frac{\delta^2}{4}}t\right)\left(\frac{\left(u_1,\omega_j\right)+\frac{\delta}{2}\left(u_0,\omega_j\right)}{\sqrt{\lambda_j-\frac{\delta^2}{4}}}\right)^2;$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} T_{5j}^2(t)=\sum_{j=1}^{\infty}\left|\left(v_0,\omega_j\right)\right|^2 e^{-\frac{2\lambda_j}{\delta}t}\omega_j.$$

În urma unor transformări care se bazează pe proprietăţile spaţiului H şi ale operatorului A, s-a obţinut că fiecare termen tinde la zero, atunci când *t* tinde la infinit. Astfel, pătratul normei diferenţei soluţiilor tinde la zero.

În calitate de operatori, care satisfac condiţiile impuse, pot servi operatori cunoscuţi ca, de exemplu:

1. $A: D(A) \subset H \to L^2(\Omega)$, unde $H = L^2(\Omega)$ este spaţiul Hilbert real uzual, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ fiind o mulţime deschisă şi mărginită cu frontiera de clasă C^1,

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in C^2(\overline{\Omega}); u|_{\delta\Omega} = 0\}, \\ (Au)(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) + a(x)u(x), \end{cases}$$

iar

$$\begin{cases} a_{ij}, \quad a: \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}), a \in C(\overline{\Omega}), \\ a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \ \forall x \in \overline{\Omega}, \quad i,j = \overline{1,n}, \\ a(x) \geq 0, \ \forall x \in \overline{\Omega}, \\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \gamma\|\xi\|^2, \ \forall x \in \overline{\Omega}, \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

2. $A: D(A) \subset H \to L^2(0;1)$, unde $H = L^2(0;1)$,

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in C^2([0,1]); u(0) = u(1) = 0\}, \\ (Au)(x) = -\big(p(x)u'(x)\big)' + q(x)u(x), \end{cases}$$

$p, q: [0,1] \to \mathbb{R}$, astfel încât $p, p', q \in C([0,1])$, $p(x) \geq p_0 > 0$,

$$q(x) \geq 0, \ \forall x \in [0;1].$$

Referinţe:

1. PERJAN, A. *Ecuaţii diferenţiale în spaţii Hilbert*. Chişinău: CEP USM, 2014, 282 p.

Recomandat
Galina RUSU, dr., conf. univ.