

**IMPACTUL VARIAȚIEI SIMULTANE A PARAMETRILOR DE CONTROL  
ASUPRA TRANZIȚIILOR DE FAZĂ DE ORDINUL ÎNTÂI ÎN PREZENȚA UNEI  
STĂRI INTERMEDIARE METASTABILE ÎN MODELUL CINETIC  
CU POTENȚIAL DE TIP LANDAU**

*Ghennadii GUBCEAC*

*Universitatea de Stat din Moldova*

Modelul parametric bazat pe potențialul de tip Landau include un parametru de ordine și trei parametri de control. Este posibil să se studieze simultan impactul atât al asimetriei (eterogenității), cât și al câmpului extern asupra tranzițiilor de fază în prezența unei stări lichide intermediare metastabile notate în articol cu  $L2$ . Am observat că prezența acestei stări metastabile influențează rata de nucleație: creșterea eterogenității sistemului accelerează dinamica de tranziție, iar prezența unui câmp extern ar putea spori timpul mediu de tranziție. Au fost calculate cele mai mici valori ale timpului mediu de tranziție pentru diferite combinații ale parametrilor de control.

*Cuvinte-cheie:* tranziții de fază, potențial de tip Landau, timp de relaxare, parametri de control.

**THE IMPACT OF THE SIMULTANEOUS VARIATION OF THE CONTROL PARAMETERS ON THE  
FIRST-ORDER PHASE TRANSITIONS IN THE PRESENCE OF A METASTABLE INTERMEDIATE  
STATE IN THE KINETIC MODEL WITH LANDAU-TYPE POTENTIAL**

The Landau-type potential based parametric model includes one order parameter and three control parameters. It is possible to study simultaneously the impact of both asymmetry (heterogeneity) and the external field on phase transitions in the presence of an intermediate metastable liquid state denoted in the article by  $L2$ . We noticed that the presence of this metastable state influences the nucleation rate: an increase in the heterogeneity of system accelerates the transition dynamics, but the presence of an external field would increase the mean transition time. The lowest values of the mean transition times for different combination of control parameters are computed.

*Keywords:* phase transitions, Landau-type potential, relaxation time, control parameters.

### **Introducere**

Modelele matematice bazate pe potențialul cinetic de tip Landau, care conține unu sau doi parametri de ordine, au fost aplicate la studiul tranzițiilor de fază de ordinul întâi în prezența unei stări intermediare metastabile pentru cazul dinamicii intrinseci [4,5]. Totodată, a fost dezvoltat modelul cinetic care conține un parametru de ordine și trei parametri de control pentru a cerceta impactul asimetriei și al câmpului extern asupra tranziției de fază în prezența unei stări intermediare instabile, însă influența acestor factori a fost cercetată separat. Soluțiile analitice au fost inițial obținute prin metoda Descartes-Euler de rezolvare a ecuațiilor polinomiale [6]. Apoi a fost efectuată o amplă analiză bifurcațională și de stabilitate a soluțiilor problemei privind tranzițiile de fază în prezența unei stări intermediare instabile aplicând metoda parametrică, iar teoria respectivă și soluția generală a acestei probleme este prezentată în [1]. Scopul principal reprezintă evidențierea condițiilor pentru care rata de tranziție poate fi amplificată de prezența stării intermediare, atunci când forțele intermoleculare de interacțiune sunt slabe și există doar o ordine apropiată în sistem. Se presupune că, în anumite condiții modelate cu ajutorul parametrilor de control, starea intermediară ar putea contribui esențial la cristalizarea substanțelor prin micșorarea barierei energiei libere. Considerând că potențialul de tip Landau posedă un parametru de ordine asociat variației densităților dintre faze și un set format din patru parametri de control asociați cu câmpul extern, difuzia, eterogenitatea și viscozitatea, putem estima efectul asimetriei și cel al influenței câmpului exterior în prezența unei stări intermediare metastabile, care sunt efecte complementare dinamicii intrinseci a sistemului.

### **Modelul teoretic**

Vom asuma că câmpul forțelor posedă structura derivatei funcției energiei libere de tip Landau, iar factorii de proporționalitate (parametrii de control) sunt coeficienții de difuzie, viscozitate etc. Evoluția parametrului de ordine  $x$  (de exemplu, variația densității substanței la tranziția de fază) este descrisă de ecuația Langevin [2]:

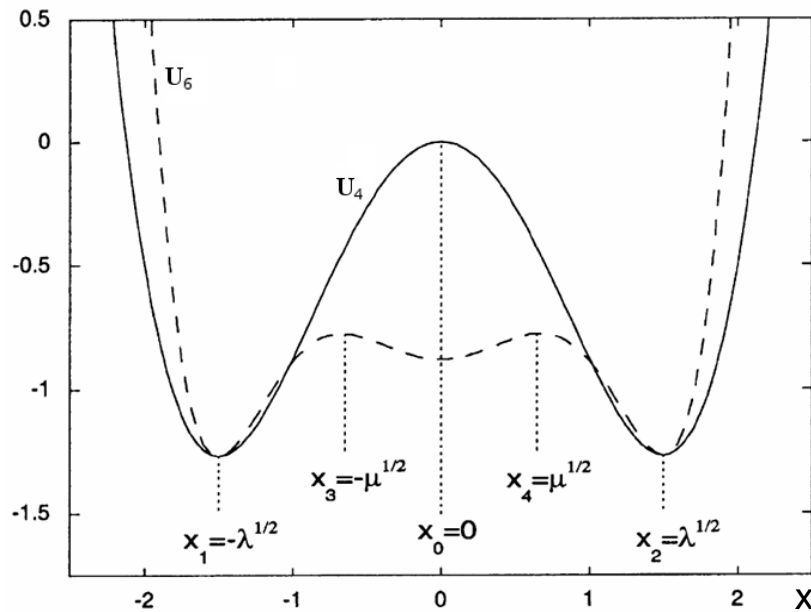
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x} + F(t), \quad (1)$$

unde  $F(t)$  este forța asociată fluctuațiilor termodinamice, pentru care se respectă următoarele egalități:

$$\langle F \rangle = 0, \quad \langle F \rangle \langle F \rangle = q^2 \delta(-t), \quad (2)$$

unde, pentru a asigura consistența cu fizica statistică, relația de fluctuație-disipație trebuie satisfăcută legând astfel dispersia fluctuației  $q^2$  din (2) cu coeficientul de difuzie  $D$  [4,5].

În cadrul acestui model se consideră că funcția  $U$  reprezintă un potențial cu trei gropi, în care minimile reprezintă fazele stabile lichidă ( $L1$ ) și cristalină ( $C$ ), cea de-a doua stare lichidă metastabilă ( $L2$ ) fiind starea metastabilă. A fost selectat pentru studiu anume potențialul de ordinul șase care descrie matematic complet procesul de tranziție, deoarece a fost demonstrat teoretic că starea intermediară accelerează tranziția de fază [5].



**Fig.1.** Potențialele tranzițiilor de fază. Linia continuă corespunde modelului cu trei stări (potențialul de gradul patru  $U_4(x)$ ), iar linia întreruptă – modelului cu cinci stări (potențialul de gradul șase  $U_6(x)$ ) [3].

Vom introduce în continuare modelul cu patru parametri de control. Fie  $\xi$  reprezintă parametrul de control care corespunde asimetriei sistemului descrise de termenul cubic al potențialului cinetic, iar parametrul de control  $\eta$  corespunde termenului linear după  $x$  al potențialului și caracterizează cuplarea sistemului la un câmp exterior. În aceste notații potențialul cinetic complet din (1) poate fi scris astfel [1,6]:

$$U(x) = \eta x - \lambda \frac{x^2}{2} + \xi \frac{x^3}{3} + \mu \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6}. \quad (3)$$

Evoluția parametrului de ordine în absența fluctuațiilor este descrisă de ecuația

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\eta + \lambda x - \xi x^2 - \mu x^3 - x^5. \quad (4)$$

Stările staționare ale sistemului,  $x_s$ , descris matematic de relația (4) cu potențialul (3), sunt soluțiile ecuației:

$$x_s^5 + \mu x_s^3 + \xi x_s^2 - \lambda x_s + \eta = 0, \quad (5)$$

care se obține din condiția de egalitate cu zero a variației în timp a parametrului de ordine  $\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ .

Totodată, o abordare analitică a problemei (5) ar fi posibilă dacă vom neglija, mai întâi, termenul care descrie

acțiunea câmpului exterior, iar apoi termenul ce caracterizează asimetria sistemului. În timp ce lichidul sub-răcit este microscopic eterogen ca structură datorită prezenței clusterilor, în sistemele reale ar trebui să existe și o anumită asimetrie a substanței în proces de cristalizare.

În acest context vom analiza patru cazuri:

a) cazul tranzițiilor intrinseci ( $\xi = \eta = 0$ ) [4];

b) cazul formării clusterilor în sistem în procesul tranziției de fază (prezenței eterogenității  $\xi \neq 0, \eta = 0$ ) [1,6];

c) cazul prezenței unui câmp extern ( $\xi = 0, \eta \neq 0$ ) [1,6];

d) analiza combinată a cazurilor b) și c) ( $\xi \neq 0, \eta \neq 0$ ), pentru  $\xi$  și  $\eta$ , când se obține câte un set de valori discrete variate concomitent.

Pentru aceste patru cazuri vom studia cinetica tranzițiilor de fază reprezentată prin timpul mediu de tranziție  $\tau$  obținut conform teoriei Kramers.

Vom considera un potențial cu două gropi și un maximum central, așa cum este reprezentat în Figura 2. Fie că în momentul inițial  $t=0$  particula se află în punctul  $x$ . Vom determina cât timp,  $T$ , particula va rămâne în intervalul  $(a,b)$  ce conține coordonata  $x$ :  $a \leq x \leq b$ . Astfel, probabilitatea că particula în momentul de timp  $t$  se află în intervalul  $[a,b]$  este  $\int_a^b dx' p(x', t|x, 0) \equiv G(x, t)$  sau  $\text{Prob}(T \geq t) = \int_a^b dx' p(x', t|x, 0)$ .

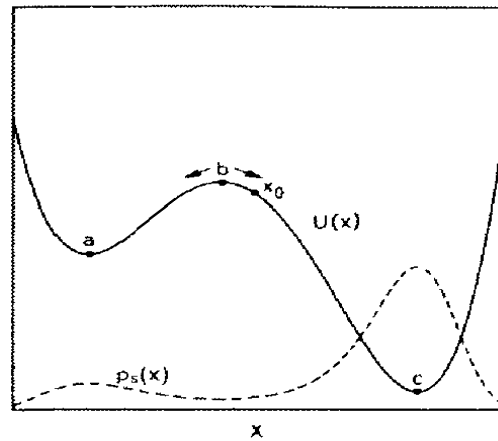


Fig.2. Potențial-model cu două gropi și un maximum central.

Deoarece sistemul este reversibil în timp, putem scrie  $p(x', t|x, 0) = p(x', 0|x, -t)$  și ecuația inversă Focker-Plank poate fi scrisă după cum urmează:

$$\partial_t p(x', t|x, 0) = A(x) \partial_x p(x', t|x, 0) + \frac{1}{2} B(x) \partial_x^2 p(x', t|x, 0). \quad (6)$$

Vom modifica ecuația (6) și vom introduce funcția  $G(x, t) \equiv \int_a^b dx' p(x', t|x, 0)$  ce reprezintă probabilitatea cumulativă că particula este în intervalul  $[a, b]$  și care satisface ecuația

$$\partial_t G(x, t) = A(x) \partial_x G(x, t) + \frac{1}{2} B(x) \partial_x^2 G(x, t) \quad (7)$$

cu următoarele condiții de frontieră:

$$p(x', 0|x, 0) = \delta(x - x') \text{ și } G(x, 0) = \begin{cases} 1, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{restul} \end{cases}, \text{ iar } G(a, t) = G(b, t) = \text{Prob}(T \geq t) \Big|_{x=a, b} = 0.$$

Astfel, valoarea medie pentru orice funcție de variabila  $T$  este  $\langle f(T) \rangle = - \int_0^\infty f(t) dG(x, t)$ . Fie  $f(T) = t$ .

Atunci valoarea medie a timpului  $T(x) = \langle T \rangle$  – “mean first passage time” – se va obține după integrarea prin părți a acestei expresii:

$$T(x) \equiv \langle T \rangle = - \int_0^\infty t \partial_t G(x,t) dt = \int_0^\infty G(x,t) dt \quad (8)$$

Similar, definind  $T_n(x) = \langle T^n \rangle$ , se obține  $T_n(x) = \int_0^\infty t^{n-1} G(x,t) dt$  – "mean  $n$ -passage time".

Vom deduce ecuația pentru  $T(x)$  utilizând (8) și integrând (7) pe intervalul  $(0, \infty)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \partial_t G(x,t) dt &= G(x, \infty) - G(x, 0) = 0 - 1 = A(x) \int_0^\infty dt \partial_x G(x,t) + B(x) \int_0^\infty dt \partial_x^2 G(x,t) = \\ &= A(x) \partial_x \left( \int_0^\infty dt G(x,t) \right) + \frac{1}{2} B(x) \partial_x^2 \left( \int_0^\infty dt G(x,t) \right) = A(x) \partial_x T(x) + \frac{1}{2} B(x) \cdot \partial_x^2 T(x). \end{aligned}$$

Prin urmare,

$$A(x) \partial_x T(x) + \frac{1}{2} B(x) \cdot \partial_x^2 T(x) = -1. \quad (9)$$

În formula (9) condițiile de frontieră sunt  $T(a) = T(b) = 0$ .

Ecuația omogenă este  $A(x)T'(x) + \frac{1}{2} B(x)T''(x) = 0$  și, prin substituția  $y = T'(x)$ , se obține soluția

$$T(x) = \int_a^b \frac{dy(x)}{\Psi(y)}, \text{ unde } \Psi(x) = \exp \left\{ 2 \int_a^x \frac{A(x')}{B(x')} dx' \right\}.$$

Ținând cont de notațiile din Figura 2 și  $B(z) = 2D$ ,  $A(x) = -U'(x)$ ,  $b \rightarrow x_0$ ,  $a \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow a$ , se obține:

$$T(x) = 2 \int_x^b \frac{dy}{\Psi(y)} \int_a^y \frac{\Psi(z)}{B(z)} dz$$

sau

$$\begin{aligned} T(a \rightarrow x_0) &= 2 \int_x^b \frac{dy}{e^{\frac{U(y)}{D}}} \cdot \int_a^y \left( \frac{1}{2D} \right) e^{\frac{U(z)}{D}} dz = \\ &= \frac{1}{D} \int_{x \rightarrow a}^{b \rightarrow x_0} e^{\frac{U(y)}{D}} dy \cdot \int_{a \rightarrow -\infty}^y e^{\frac{U(z)}{D}} dz = \frac{1}{D} \int_a^{x_0} e^{\frac{U(y)}{D}} dy \cdot \int_{-\infty}^y e^{\frac{U(z)}{D}} dz. \end{aligned} \quad (10)$$

Astfel, în ecuația (10) putem separa două integrale distincte:

$$T(a \rightarrow x_0) \cong \frac{1}{D} \int_a^{x_0} e^{\frac{U(y)}{D}} dy \cdot \int_{-\infty}^b e^{\frac{U(y)}{D}} dy = \frac{1}{D} I_2 \cdot I_1,$$

unde  $D$  este coeficientul de difuzie.

Calculul separat al integralelor ne conduce la rezultatul:

$$I_1 = \sqrt{\frac{2\pi D}{U''(a)}} e^{\frac{U(a)}{D}}, \quad I_2 = \sqrt{\frac{2\pi D}{|U''(b)|}} e^{\frac{U(b)}{D}}.$$

Prin urmare, formula finală capătă aspectul:

$$T(a \rightarrow x_0) \equiv T(a \rightarrow b) = \frac{2\pi}{\sqrt{U''(a) |U''(b)|}} e^{\frac{U(b)-U(a)}{D}}.$$

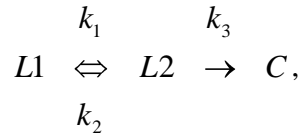
Acest rezultat coincide cu relația obținută pentru rata de tranziție [1, 4]:

$$k_i^{-1} = \frac{2\pi}{\sqrt{-U''(x_{\min}) U''(x_{\max})}} \exp \left( \frac{\Delta U_i}{(q^2/2)} \right), \quad (11)$$

unde  $q^2/2 = D$ .

**Rezultate numerice**

Tranzițiile de la starea lichidă stabilă  $L1$ , care corespunde minimului potențialului în punctul  $a$ , către starea stabilă cristalină  $C$ , care corespunde minimului potențialului în punctul  $c$ , pot fi descrise schematic în forma:



unde  $k_i$  reprezintă ratele corespunzătoare de tranziție  $i=1,2,3$ , iar  $L2$  este starea lichidă intermediară instabilă. Prin urmare, ținând cont de (11), se obține:

$$k_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-U''(x_{\min}) U''(x_{\max})} \exp\left(\frac{-\Delta U_i}{(q^2/2)}\right),$$

care vor reprezenta coeficienții ecuațiilor master pentru probabilitățile  $p_{L1}$  și  $p_{L2}$  ( $p_C = 1 - p_{L1} - p_{L2}$ ) de a găsi sistemul în stările  $L1$  și  $L2$ , respectiv:

$$\frac{dp_{L1}}{dt} = -k_1 p_{L1} + k_2 p_{L2}, \quad (12)$$

$$\frac{dp_{L2}}{dt} = -k_1 p_{L1} + (k_2 + k_3) p_{L2}. \quad (13)$$

Valoarea minimală absolută a valorii proprii  $k$  pentru matricea probabilităților date de relațiile (12) și (13) reprezintă rata totală de tranziție din  $L1$  în  $C$ :

$$k = \frac{1}{2} \left[ (k_1 + k_2 + k_3) + \sqrt{-4k_1 k_3 + (k_1 + k_2 + k_3)^2} \right],$$

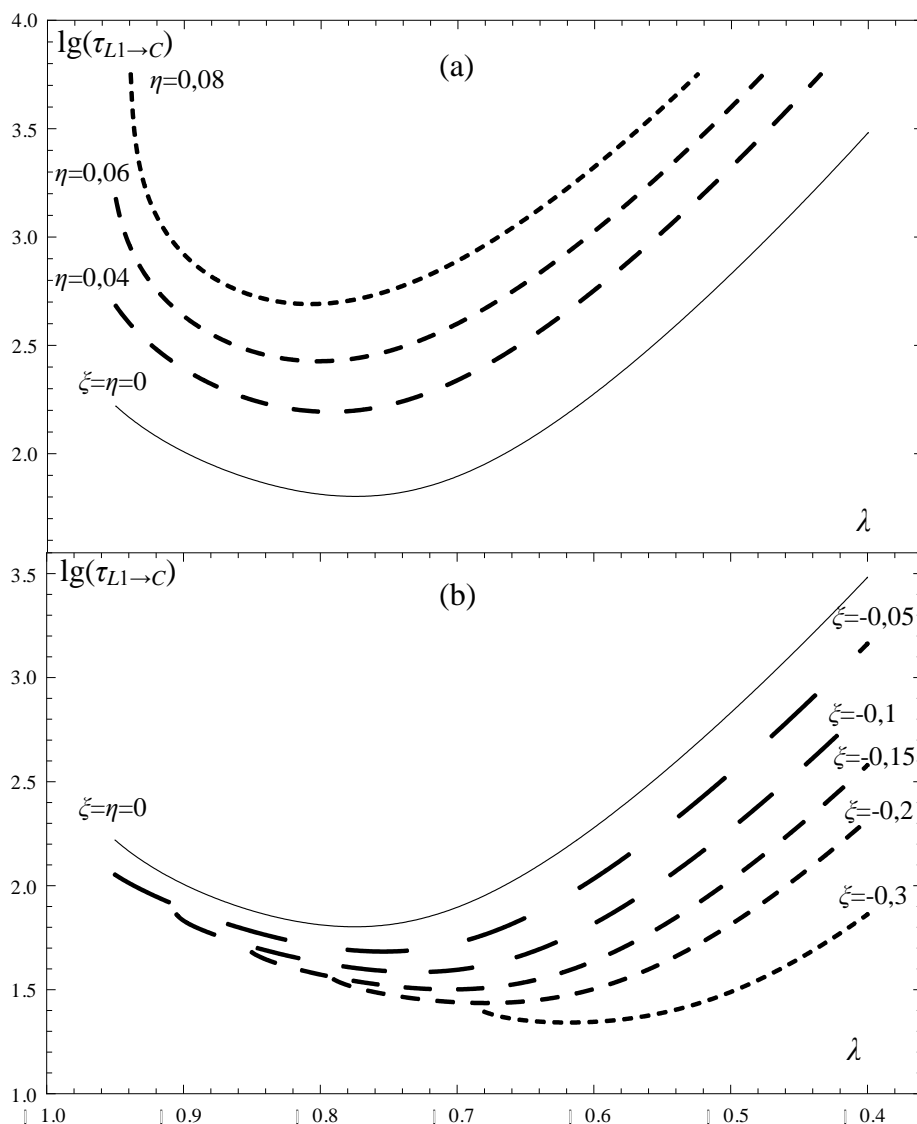
astfel încât timpul mediu de tranziție este  $\tau_{L1 \rightarrow C} = |k|^{-1}$ .

În Figura 3 este reprezentat logaritmul zecimal al timpului mediu de tranziție  $\tau$  dintre stările  $L1$  și  $C$  în funcție de parametrul de control  $\lambda$  în regiunea coexistenței stărilor  $L1$  și  $L2$  pentru diferite valori ale parametrilor de control  $\eta$  (a) și  $\xi$  (b). Am obținut următoarele rezultate principale:

a) Studiul tranzițiilor de fază și calculul timpului mediu de relaxare pentru cazul tranzițiilor intrinseci  $\tau(\lambda)$  a fost efectuat anterior de Nicolis [4, 5], curba pentru logaritmul zecimal al timpului de tranziție este reprezentată în Figura 3 (a) și (b) cu o linie continuă ( $\xi = \eta = 0$ ).

b) Studiul tranzițiilor de fază pentru potențialul asimetric ( $\xi \neq 0, \eta = 0$ ) a fost realizat analitic inițial în [6], iar în [1] este prezentată soluția generală, care include și rezultatele numerice similare celor obținute pentru sistemul eterogen și reprezentate în Figura 3 (b). Au fost efectuate calcule pentru diferite valori ale parametrului de control  $\xi$  și am observat că la micșorarea valorii  $\xi$  (domeniul  $\xi < 0$ ) are loc creșterea ratei de tranziție din starea  $L1$  în starea  $C$  prin intermediul stării instabile  $L2$ . Acest fapt se datorează asimetriei potențialului cauzat de prezența termenului cu coeficientul de control  $\xi$ , ceea ce în cazul unui sistem fizic real corespunde prezenței nucleelor de cristalizare într-un lichid subrăcit sau a clusterilor într-un sistem eterogen.

c) Dinamica tranzițiilor de fază sub acțiunea câmpului extern ( $\eta \neq 0, \xi = 0$ ) a fost la fel studiată în [1,3], iar unele rezultate sunt prezentate în Figura 3 (a). Din această figură observăm că pentru valorile mici  $\eta \neq 0$  are loc o încetinire considerabilă a tranzițiilor de fază de ordinul întâi. Menționăm că în figură este reprezentată o dependență logaritmică.



**Fig.3.** Logaritmul zecimal al timpului mediu de tranziție  $\tau$  dintre stările lichidă  $L1$  și cea cristalină  $C$  în dependență de parametrul de control  $\lambda$  în regiunea coexistenței stărilor lichide  $L1$  și  $L2$  în prezența câmpului exterior (a) și a eterogenității (b). Am considerat următoarele valori constante pentru parametrii  $\mu=-2$  și  $q^2=0.1$ .

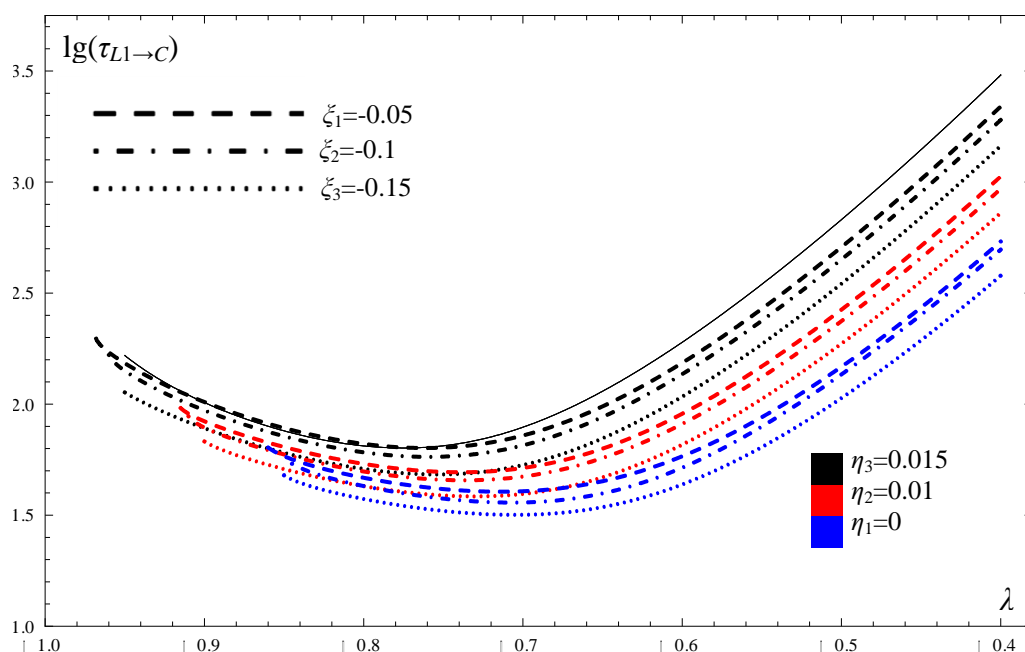
În acest context apare întrebarea privind comportarea sistemului dacă vom ține cont de influența ambilor factori concomitenți: eterogenitate și câmpul extern (a se vedea Tabelul 1). Acest lucru nu a fost cercetat anterior și răspunsul la această întrebare poate fi sugerat de ecuația (3), unde se observă că dependența potențialului de parametrul de control  $\eta$  este liniară, iar  $\xi$  reprezintă coeficientul de proporționalitate al termenului cubic, însă încercarea de a prezice calitativ comportarea  $\tau(\eta, \xi, \lambda)$  este pripită. Astfel, vom cerceta numeric problema dată pe calculator.

**Tabelul 1**

**Scheme de variație a parametrilor de control la tranzițiile de fază de ordinul întâi în modelul cinetic cu potențial de tip Landau**

Tranziții intrinseci $\lambda - \text{variabil}, \xi = \eta = 0, \mu = -2$	
Tranziții în prezența câmpului extern $\lambda, \eta - \text{variabil}, \xi = 0, \mu = -2$	Tranziții în prezența eterogenității $\lambda, \xi - \text{variabil}, \eta = 0, \mu = -2$
Tranziții în prezența câmpului extern și a eterogenității $\lambda, \xi, \eta - \text{variabil}, \mu = -2$	

d) Fie  $\eta \neq 0$  și  $\xi \neq 0$ . Pentru aceasta vom defini vectorii parametrilor de control  $\eta = \eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$  și  $\xi = \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ , iar în model vom varia, pentru fiecare valoare  $\eta$  fixată, întregul set de valori  $\xi$ . Astfel, vom obține o familie de curbe care vor descrie discret dependența  $\tau(\eta, \xi, \lambda)$ . Drept rezultat am obținut setul de curbe  $\tau(\eta, \xi, \lambda)$  reprezentate în Figura 4, unde se observă că odată cu descreșterea, de sus în jos, a parametrului  $\eta$  are loc micșorarea timpului mediu de tranziție  $\tau_{L1 \rightarrow C}$ , iar pentru aceeași valoare a lui  $\eta$  și pentru diferite valori ale coeficientului de asimetrie  $\xi$  se observă accelerarea tranziției de fază odată cu creșterea valorii absolute (de sus în jos) a parametrului de control  $\xi$ . Cazul dinamicii intrinseci este reprezentat grafic cu o curbă continuă, care posedă valoarea minimă a lui  $\lg \tau_{L1 \rightarrow C}$  pentru  $\lambda = -0.79$ . Astfel, se mai observă că câmpul extern și eterogenitatea acționează în mod diferit asupra deplasării minimumului timpului mediu de tranziție: creșterea valorii absolute a coeficientului de asimetrie deplasează acest minim în domeniul valorilor absolute mai mici ale lui  $\lambda$ , pe când creșterea coeficientului  $\eta$  contribuie la deplasarea minimumului respectiv în sens opus.



**Fig.4.** Logaritmul zecimal al timpului mediu de tranziție  $\tau$  dintre stările lichidă  $L1$  și cea cristalină  $C$  în dependență de parametrul de control  $\lambda$  în regiunea coexistenței stărilor lichide  $L1$  și  $L2$  și în prezența simultană a câmpului exterior și a eterogenității pentru valorile constantele  $\mu=-2$  și  $q^2=0.1$ .

Valorile minime ale timpului mediu de tranziție în funcție de parametri de control variabili sunt prezentate în Tabelul 2.

**Tabelul 2**

**Valorile minime ale timpului mediu de tranziție în funcție de parametrii de control  $\xi$  și  $\eta$**

$\lambda_{\min}, \lg \tau_{\min}(\eta_i, \xi_j, \lambda)$	$\eta_1=0$	$\eta_2=0.01$	$\eta_3=0.015$
$\xi_1=-0.05$	(-0.748, 1.684)	(-0.763, 1.764)	(-0.768, 1.799)
$\xi_2=-0.1$	(-0.725, 1.585)	(-0.737, 1.658)	(-0.746, 1.693)
$\xi_3=-0.15$	(-0.695, 1.503)	(-0.699, 1.556)	(-0.707, 1.607)

Datele din Tabelul 2 sunt prezentate pentru setul de valori  $\lambda_{\min}, \lg \tau_{\min}(\eta_i, \xi_j, \lambda)$ , unde  $i, j = 1, 2, 3$  și  $\lambda_{\min}$  corespunde valorii lui  $\lambda$  pentru  $\tau_{\min}$ .

**Concluzii**

Am aplicat modelul cinetic cu potențial de tip Landau, pentru care se obțin fazele stabile lichidă ( $L1$ ) și cristalină ( $C$ ), precum și a doua stare lichidă metastabilă ( $L2$ ). Un asemenea potențial de ordinul șase descrie matematic complet tranziția de fază de ordinul întâi, iar în acest context există patru variante de selecție a parametrilor de control: cazul tranzițiilor intrinseci ( $\xi = \eta = 0$ ), cazul eterogen ( $\xi \neq 0, \eta = 0$ ) și cel al prezenței câmpului extern ( $\xi = 0, \eta \neq 0$ ), când un parametru de control corespunzător este diferit de zero, precum și cazul acțiunii simultane a ambelor efecte asupra cineticii tranzițiilor de fază. Pentru aceste patru variante distincte, reprezentate în Tabelul 1, rezultatele au fost analizate comparativ.

A fost demonstrată formula pentru rata de tranziție (11). Această relație este folosită în continuare pentru a calcula timpul mediu de tranziție, ale cărui valori minime sunt prezentate în funcție de parametrii de control  $\xi$  și  $\eta$  în Tabelul 2. Pe baza setului de curbe care descriu dependența  $\tau(\eta, \xi, \lambda)$  am constatat că la descreșterea parametrului  $\eta$  are loc micșorarea timpului mediu de tranziție  $\tau_{L1 \rightarrow C}$ , iar la creșterea valorii absolute a coeficientului de asimetrie  $\xi$ , când  $\eta$  este fixat, are loc accelerarea tranziției de fază. Prin urmare, câmpul extern și eterogenitatea acționează în mod opus asupra deplasării minimumului timpului mediu de tranziție, iar rezultatele obținute se află în deplin acord cu cazurile particulare enunțate în lucrările publicate anterior.

**Bibliografie:**

1. BARSUK, A., GAMURARI, V., GUBCEAC, G., PALADI, F. Bifurcation and stability analysis for phase transitions in the presence of an intermediate state: A general solution. In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2013, vol. 392, p.1931-1945. ISSN: 0378-4371
2. GARDINER, C.W. *Handbook of stochastic methods for physics, chemistry, and the natural sciences* (Springer series in synergetics, vol.13). Berlin: Springer-Verlag, 1985. 442 p. ISBN 3-540-15607
3. GUBCEAC, G., PALADI, F., BARSUK, A. Contributions to the fluid dynamics and phase transitions at low temperatures. In: *10<sup>th</sup> International Conference of Young Scientists on Energy Issues: conference proceedings*, 29-31 May, 2013. Kaunas, Lithuania: CYSENI, 2013, p.VI-370–VI-375. ISSN 1822-7554
4. NICOLIS, G., NICOLIS, C. Kinetics of phase transitions in the presence of an intermediate metastable state: a generic model. In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2005, vol.351, no.1, p.22-39. ISSN: 0378-4371
5. NICOLIS, G., NICOLIS, C. Enhancement of the nucleation of protein crystals by the presence of an intermediate phase: a kinetic model. In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2003, vol.323, p.139-154. ISSN: 0378-4371
6. PALADI, F. Effects of asymmetry and external field on phase transitions in the presence of an intermediate metastable state. In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2010, vol.389, p.1986-1992. ISSN: 0378-4371

Prezentat la 10.06.2013