STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE
*Revistă Ştiinţifică a Universităţii de Stat din Moldova, 2013, nr.7(67)*

# PROPAGAREA UNDELOR ELASTICE ÎN MEDII PLAN-PARALELE

***Alisa CURLICOVSCHI***
*Universitatea de Stat din Moldova*

Unde elastice apar doar dacă există sursa de oscilaţie (perturbaţia) şi mediul elastic de propagare. Propagarea lor continuă are loc cu o viteză finită, numită viteză de propagare a undelor elastice, iar localizarea în timp şi spaţiu se referă la sursa de oscilaţii. Unda elastică transmite energie şi impuls, iar propagarea oscilaţiilor printr-un mediu elastic sub formă de unde elastice indică tendinţa sistemului spre o valoare minimă a energiei potenţiale, adică spre o nouă stare de echilibru. În lucrare este prezentată soluţionarea problemei cu privire la răspândirea undelor elastice monocromatice în medii plan-paralele. Funcţiile proprii ale oscilaţiilor pentru problema cercetată nu depind de vectorul de undă, iar vitezele de grup sunt mai mici ca vitezele de propagare a undelor de deplasare în mediul cu aceleaşi caracteristici şi se apropie asimptotic de această viteză odată cu creşterea vectorului de undă.
***Cuvinte-cheie:*** *unde elastice, medii plan-paralele, vector de undă, viteze de propagare*.

**THE PROPAGATION OF ELASTIC WAVES IN PLANE-PARALLEL MEDIA**
Elastic waves occur only if the source of oscillation (perturbation) and the elastic propagation medium exist. Their continuous propagation takes place at a finite speed, the so-called elastic waves propagation speed, and location in time and space refers to the oscillation source. Elastic wave transmits energy and momentum, and oscillations propagation through an elastic medium in the form of elastic waves, shows the tendency of the system towards a minimum potential energy, i.e. to a new steady state. The paper presents the solution of the problem of the monochromatic elastic waves propagation in plane-parallel mediums. Eigenfunctions of the oscillations for the considered problem do not depend on the wave vector, and the group velocities are smaller than the propagation speeds of the displacement waves in a medium with the same features and it is approaching asymptotically this speed with the increase in wave vector.
***Keywords:*** *elastic waves, plane-parallel mediums, wave vector, velocity of propagation*.

## Introducere

Undele elastice sunt generate în medii elastice de către perturbaţii mecanice care constau într-o deformare locală a mediului (întindere, comprimare, forfecare, încovoiere etc.), producând variaţia locală a diferiţilor parametri caracteristici mediului (de exemplu, poziţia unui punct material din mediu, viteza acestuia, presiunea, densitatea etc.), care vor fi funcţii atât de poziţie, cât şi de timp.

Sursa de oscilaţii poate fi constituită dintr-o varietate de sisteme fizice. Ca surse de oscilaţii putem considera:

– coardele vocale care generează sunetul vocii umane;
– interacţiunea plăcilor tectonice ale scoarţei Pământului (originea undelor seismice);
– atracţia Lunii şi a Soarelui determină undele care se propagă în oceanul planetar (mareele);
– o coardă elastică pusă în stare de vibraţie;
– instrumentele muzicale etc.

Mediul elastic de propagare a undelor elastice reprezintă un mediu continuu format din particule materiale (atomi, ioni, molecule), între care se exercită forţe elastice. De regulă, orice formă de agregare cunoscută: solidă, lichidă, gazoasă sau plasmă poate fi considerată ca mediu elastic. Din exemplificările privind producerea undelor elastice se observă că ele sunt indispensabile şi nu pot exista decât simultan. De exemplu, dacă există sursa de oscilaţii dar nu există mediul elastic, nu apare unda elastică; un clopoţel situat sub un vas de sticlă vidat nu produce sunet, deoarece nu există mediu elastic (aerul). Pe Lună nu pot fi transmise sunetele de la un astronaut la altul, deoarece nu există atmosferă. Însă, poate exista şi fenomenul invers: să fie mediu elastic, dar fără sursă de oscilaţie, ca, de exemplu, suprafaţa liniştită a unui lac. În concluzie: ***unda elastică apare numai dacă există sursa de oscilaţie (perturbaţia) şi mediul elastic de propagare***.

Sursa de oscilaţii (perturbaţii) transmite prin mediul elastic mişcarea sa oscilatorie particulelor materiale din jurul său şi în contact direct cu el. Aceste particule transmit, la rândul lor, mişcarea oscilatorie particulelor învecinate şi astfel, din aproape în aproape, oscilaţiile provenite de la sursă se propagă prin mediul elastic sub formă de unde elastice. De aceea, undele elastice reprezintă un proces fizic după care perturbaţia (sursa de oscilaţii) se propagă într-un mediu elastic prin interacţiune continuă şi, din aproape în aproape, a particulelor materiale ale mediului elastic respectiv. Această propagare continuă are loc cu o viteză finită numită *viteză de propagare a undelor elastice*, iar localizarea în timp şi spatiu se referă la sursa de oscilații. Ceea ce se propagă prin mediul elastic este mişcarea oscilatorie şi nu particulele materiale care efectuează oscilații locale, adică unda elastică transmite energie şi impuls. Se cunoaşte faptul că starea de echilibru se realizează când valoarea energiei potențiale este minimă. O perturbație a mediului elastic (sursă de oscilații) conduce la o creştere a energiei potențiale şi, implicit, la o stare de dezechilibru a sistemului. Propagarea oscilațiilor prin mediul elastic sub formă de unde elastice indică tendința sistemului spre o valoare minimă a energiei potențiale, adică spre o nouă stare de echilibru.

Mediile continue sunt sisteme de particule legate (molecule, atomi, ioni), adică particule care interacționează între ele, astfel încât dacă una din particule oscilează, vor oscila după ea şi particulele vecine. O mişcare oscilatorie, imprimată unui punct dintr-un mediu elastic, se comunică progresiv şi celorlalte puncte ale mediului. Punctul material ce a fost pus în stare de vibrație devine un izvor (sursă) de oscilații care se propagă în toate direcțiile din spațiu. Propagarea din aproape în aproape a unei perturbații în mediul elastic poartă numele de *undă elastică*.

Mediile care determină anumite particularități ale propagării undelor pot fi clasificate astfel: omogene sau neomogene; izotrope sau anizotrope; liniare sau neliniare; dispersive sau nedispersive; conservative sau disipative.

Un mediu este:

– omogen dacă proprietățile fizice sunt aceleaşi în orice punct, independent de coordonate;

– anizotrop dacă proprietățile fizice variază în raport cu direcția şi izotrop dacă nu există direcții privilegiate pentru aceste proprietăți;

– liniar dacă perturbația globală este provenită prin suprapunerea mai multor unde de acelaşi tip, descrise de funcțiile de undă;

– dispersiv dacă viteza de propagare a perturbației depinde de caracteristicile mediului;

– disipativ dacă propagarea se face cu absorbție de energie şi conservativ dacă propagarea nu se face cu absorbție de energie.

*Un mediu este ideal* dacă acesta este omogen, izotrop, liniar, nedispersiv şi conservativ. La clasificarea undelor elastice se consideră atât elemente proprii undei elastice, cât şi elemente caracteristice mediului de propagare. Se defineşte *front de undă* locul geometric al punctelor din mediul elastic intrate în mişcare oscilatorie în acelaşi moment. Se defineşte *suprafață de undă* locul geometric al punctelor care sunt la un moment dat în aceeaşi fază de oscilație. Definițiile arată că există un singur front de undă şi o infinitate de suprafețe de undă. Într-un mediu elastic izotrop şi omogen viteza de propagare a undelor elastice fiind aceeaşi în toate direcțiile, frontul şi suprafețele de undă devin sfere concentrice cu centrul în sursa de oscilație. Considerând o direcție de propagare în spațiu a undelor elastice care să treacă prin centrul sursei de oscilație, ansamblul fenomenelor oscilatorii după această direcție constituie *rază de undă*. Se defineşte *rază de undă* dreapta perpendiculară pe suprafața de undă într-un punct dat, orientată de la sursă spre exterior în sensul propagării undei. În medii neomogene şi anizotrope forma inițială a suprafeței de undă nu se menține constantă în timp şi spațiu, se deformează datorită propagării undei cu viteze diferite şi pe direcții diferite prin mediul elastic. În medii omogene şi izotrope, unde perturbația se propagă cu aceeaşi viteză în toate direcțiile, frontul de undă coincide cu suprafața de undă. Forma suprafețelor de undă depinde atât de proprietățile mediului elastic, cât şi de geometria sursei de oscilații. Geometria sursei de oscilații clasifică undele elastice în unde plane şi unde sferice.

Modurile de propagare se definesc în funcție de două direcții: direcția de oscilație a particulelor materiale şi direcția de propagare a undelor elastice. În această considerație, distingem următoarele moduri de propagare:

– modul de propagare longitudinal (unde longitudinale);

– modul de propagare transversal (unde transversale);

– modul de propagare la suprafață (unde de suprafață);

– modul undelor de placă.

Spațiul (mediul elastic) din jurul sursei de oscilații străbătut de unde elastice se numeşte *câmp de unde*, iar dacă este vorba de *unde sonore*, definim câmpul sonor sau *câmp acustic*. În propagarea lor printr-un mediu elastic, undele elastice se caracterizează prin frecvență, viteză de propagare şi lungime de undă.

În funcţie de frecvenţa *f*, adică de numărul de oscilaţii pe secundă, undele elastice se clasifică în:

– *unde infrasonore* (infrasunetele) având frecvenţe cuprinse între 0 şi 20 Hz (0<f<20 Hz). Aceste unde se află sub limita intervalului audibil, nu sunt percepute de către organul auditiv al omului; sunt sesizabile prin efectele secundare pe care le produc;

– *unde sonore* (sunete) cuprinse între 20 Hz şi 20000 Hz (20 Hz<f<20 KHz), produc senzaţia nedureroasă de *sunet*; reprezintă intervalul de audibilitate al omului;

– *undele ultrasonore* (ultrasunetele) având frecvenţa cuprinsă între 20 KHz şi 600 MHz (20 KHz <f<600 MHz); produc senzaţia de durere asupra organului auditiv uman;

– *undele hipersonore* (hipersunetele) având frecvenţa cuprinsă între 600 MHz şi 100 GHz (1GHz=$10^9$Hz).

Limita superioară a frecvenţei este determinată de performanţele tehnice ale aparaturii de producere a ultrasunetelor (surse).

Viteza de propagare, notată υ, reprezintă viteza de propagare a undelor elastice prin material. După caracterul vitezei de propagare a undei elastice se disting:

– *unde nedispersive,* la care viteza undei într-un mediu omogen şi izotrop este constantă pentru toate lungimile de undă din grupul respectiv de unde. Undele sonore în aer şi, în general, în fluide sunt unde nedispersive;

– *unde dispersive,* la care viteza de propagare depinde de lungimea de undă sau de frecvenţă. În cazul propagării unui grup de unde, fiecare undă monocromatică din grup va avea viteza sa proprie de propagare, numită *viteză de fază*, aşa încât fenomenul de propagare este dispersiv, fenomen manifestat la solide anizotrope.

Lungimea de undă, notată λ, reprezintă distanţa măsurată pe rază între două puncte consecutive care prezintă aceeaşi fază de oscilaţie. Această distanţă variază cu frecvenţa şi cu viteza de propagare a undelor elastice prin material.

## 1. Modelul teoretic

Păstrând presupunerea caracteristicilor mecanice ale mediilor elastice [1, p.143] este prezentată soluţionarea problemei cu privire la răspândirea undelor elastice monocromatice de deplasare în medii plan-paralele.

Pentru a descrie starea tensionat-deformată a stratului elastic, se introduce un sistem de coordonate cartezian dreptunghiular $x_1, x_2, x_3$ cu axa $ox_3$ orientată perpendicular spre suprafeţele de frontieră ale stratului şi suprafaţa $x_1ox_2$, care trece prin mijlocul stratului. În sistemul de coordonate ales suprafeţele de frontieră sunt descrise de ecuaţia $x_3 = \pm d/2$, unde *d* – grosimea stratului. Axa $ox_1$ coincide cu direcţia răspândirii undei monocromatice elastice. Starea deformată a mediului va fi caracterizată de vectorul deplasării $\vec{U}(x_1, x_2, x_3, t)$ cu componentele $U_1(x_1, x_2, x_3, t)$, $U_2(x_1, x_2, x_3, t)$, $U_3(x_1, x_2, x_3, t)$ şi tensorul deformării corespunzător $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)(i, j = 1,2,3)$, iar starea tensionată – de tensorul tensiunii $\sigma_{ij}(i, j = 1,2,3)$ [2, 4].

Toate caracteristicile mecanice ale mediului elastic în strat sunt considerate constante în suprafeţele paralele celor de frontieră şi pot să se modifice în direcţia longitudinală a stratului. Tensorii deformării şi tensiunii în mediul elastic anizotrop sunt legaţi prin legea generalizată a lui Hooke [6, p.21]:

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (i, j = 1,2,3),$$

unde $A_{ijkl}$ – tensorul modulelor elastice pentru $A_{ijkl} = A_{ijkl}(x_3)$.

Pentru comoditatea expunerii ulterioare în cazul modulelor elastice se va introduce o notaţie de doi indici

$$A_{1111} = c_{11},\ A_{2222} = c_{22},\ A_{3333} = c_{33},\ A_{1122} = c_{12},\ A_{1133} = c_{13},\ A_{1313} = c_{44},\ A_{2323} = c_{55},\ A_{1212} = c_{66}$$

Calculele ulterioare se efectuează pentru mediile anizotrope caracterizate de corelaţiile suplimentare dintre module $c_{44} = c_{55} \neq c_{66}$.

Pentru unda monocromatică vectorul deplasării în sistemul de coordonate adoptat se scrie sub forma:

$$\vec{U}(x_1, x_2, x_3, t) = \vec{u}(x_3)e^{i(\omega t - kx_1)}, \qquad (1)$$

unde $\vec{u}(x_3)$ – valoarea de amplitudine a vectorului deplasării, $\omega$ – frecvenţa unghiulară, $k$ – vectorul de undă. Starea tensionat-deformată a fâşiei elastice se determină în rezultatul soluţionării ecuaţiilor dinamice ale teoriei elasticităţii

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j},\ (i,j=1,2,3) \tag{2}$$

la îndeplinirea condiţiilor iniţiale şi de frontieră.

Particularitatea formării stării tensionat-deformate în stratul elastic atât în problemele statice, cât şi dinamice ale teoriei elasticităţii oferă posibilitatea descompunerii acestei stări în două: pentru una dintre ele deformarea are loc în suprafeţele $x_1x_2$ (deformarea rotativ-deplasată), pentru care nu are loc deformarea curbei fâşiei, iar pentru alta – în suprafaţa $x_1x_3$. În particular, pentru unda monocromatică (1) deformarea rotativ-deplasată se reduce numai la cea de deplasare şi se descrie prin componenta de deplasare $U_2(x_1,x_2,x_3,t)$. Deoarece în expunerea ulterioară figurează doar această componentă, pentru simplificare indexul de jos în reprezentarea acestei componente îl vom omite. Ecuaţiile dinamice ale elasticităţii (2) pentru deformările de deplasare enunţate, create de continuitatea undei monocromatice (1), se reduc la ecuaţii diferenţiale de gradul doi faţă de amplitudinea funcţiei $u(x_3)$ [4, p.22]:

$$-\rho\omega^2 u(x_3)=(c_{44}(x_3)u'(x_3))'-c_{66}(x_3)k^2u(x_3). \tag{3}$$

Pentru fâşia cu frontierele libere tensiunile tangente suprafeţelor de frontieră ale fâşiei sunt egale cu zero şi în felul acesta avem $\sigma_{23}(x_1,x_2,\pm d/2)=c_{44}(\pm d/2)u'(\pm d/2)$, de unde ajungem la condiţiile de frontieră pentru funcţia de amplitudine

$$u'(\pm d/2)=0. \tag{4}$$

Ecuaţia diferenţială (3) şi condiţiile de frontieră (4) determină problema spectrală de frontieră pentru determinarea frecvenţelor proprii permise şi a frecvenţelor amplitudinilor corespunzătoare lor ale oscilaţiilor de deplasare ale stratului fără schimbarea formei sale. Menţionăm că problema de frontieră (3), (4) este autoconjugată, ceea ce permite analizarea soluţiilor, utilizarea metodelor comune de analiză şi a rezultatelor teoriei operatorilor diferenţiali autoconjugaţi.

Îndeosebi, vom menţiona că problema (3), (4) depinde de parametrul $k$ şi astfel frecvenţele proprii ca şi funcţii de amplitudine, în caz general, la fel sunt funcţii de parametrul $k$, adică:

$$\omega_i=\omega_i(k),\ u_i=u_i(x_3;k)$$

(prin indicele de jos se numerotează elementele proprii ale problemei spectrale de frontieră (3), (4)).

La varierea continuă a parametrului $k$ frecvenţele proprii ale oscilaţiilor reprezintă funcţii continue $\omega_i=\omega_i(k)$ (curbe dispersionale). Vom arăta că intersecţia graficelor acestor funcţii obţinute în rezultatul soluţionării problemei dispuse este imposibilă. Într-adevăr, dacă pentru careva valori ale parametrului $k$ ar avea loc intersecţia graficelor, aceasta ar însemna că valoarea frecvenţei pentru această valoare a parametrului este dublă. Vom scrie ecuaţia (3) pentru funcţia proprie $u(x_3)$ şi vom înmulţi ambele părţi ale ecuaţiei cu funcţia $v(x_3)$. Efectuând o procedură analoagă faţă de funcţia $v(x_3)$ cu înmulţirea ulterioară la funcţia proprie $u(x_3)$ şi scăderea expresiilor obţinute, ca rezultat ajungem la expresia $(c_{44}(x_3)u'(x_3))'v(x_3)-(c_{44}(x_3)v'(x_3))'u(x_3)=0$, care o prezentăm sub forma $c'_{44}(x_3)w(x_3)+c_{44}(x_3)w'(x_3)=0$, unde este introdusă notarea $w(x_3)=u'(x_3)v(x_3)-u(x_3)v'(x_3)$. Soluţia ecuaţiei în raport cu $w(x_3)$ se scrie sub formă explicită $c_{44}(x_3)w(x_3)=c_{44}(x_3)(u'(x_3)v(x_3)-u(x_3)v'(x_3))=Const$ şi, luând în consideraţie condiţiile de frontieră (4) pentru funcţiile proprii, se obţine $u'(x_3)v(x_3)-u(x_3)v'(x_3)=0$. Ca rezultat, se ajunge la dependenţa $u(x_3)=Cv(x_3)$, care este în contradicţie cu condiţia independenţei liniare a funcţiilor ce aparţin valorii proprii duble. În aşa fel, intersecţia curbelor dispersionale corespunzătoare oscilaţiilor de deplasare ale stratului este imposibilă.

Un şir de afirmaţii despre caracterul dependenţelor dispersionale $\omega_n(k)$ pot fi spuse fără soluţionarea nemijlocită a problemei de frontieră (3), (4), dacă se apelează la formularea ei variaţională. Se cunoaşte că problemei de frontieră autoconjugate oricând i se poate pune în corespondenţă problema variaţională, ca ecuaţie Euler pentru ea va fi această problemă de frontieră [5, p.173]. Cu scopul obţinerii expresiei pentru funcţionala corespunzătoare problemei de frontieră discutate, înmulţim ambele părţi ale ecuaţiei diferenţiale (3) cu $u(x_3)$ şi integrăm în intervalul $(-0.5d, 0.5d)$. Ca rezultat, luând în consideraţie condiţiile de frontieră (4), ajungem la expresia Rayleigh pentru frecvenţă:

$$\omega^2[u] = \frac{\int_{-0.5d}^{0.5d} c_{44}(x)u'^2(x)dx}{\int_{-0.5d}^{0.5d} \rho(x)u^2(x)dx} + \frac{\int_{-0.5d}^{0.5d} c_{66}(x)u^2(x)dx}{\int_{-0.5d}^{0.5d} \rho(x)u^2(x)dx} k^2 . \tag{5}$$

Prin calcule nemijlocite se verifică dacă ecuaţia diferenţială (3) este ecuaţia Euler pentru problema variaţională

$$\omega^2[u] \to extremum_{u(x)}, \tag{6}$$

unde funcţionala $\omega^2[u]$ se determină prin expresia (5). În timp ce condiţiile de frontieră (4) sunt după terminologia calculului variaţional naturale pentru funcţionala (5), această condiţie poate fi efectiv utilizată la efectuarea calculelor cu utilizarea formulării variaţionale a problemei de frontieră, deoarece permite neglijarea îndeplinirii condiţiilor de frontieră, fiindcă condiţiile de frontieră naturale se îndeplinesc automat la atingerea minimumului de către funcţională. Menţionăm că în expresiile de sub integrale (5), spre deosebire de ecuaţia diferenţială (3), coeficienţii variaţionali nu se diferenţiază.

Expresia Rayleigh (5) pentru frecvenţele oscilaţiilor libere [3, p.228] permite obţinerea în formă generală a expresiei pentru vitezele de grup, corespunzătoare dependenţelor dispersionale $\omega_n(k)$:

$$v_n(k) = \frac{d\omega_n(k)}{dk} = \frac{1}{\omega_n(k)} \frac{\int_{-0.5d}^{0.5d} c_{66}(x)u_n^2(x)dx}{\int_{-0.5d}^{0.5d} \rho(x)u_{2n}^2(x)dx} k . \tag{7}$$

La obţinerea expresiei (7) în mod esenţial se utilizează faptul că funcţiile proprii $u_n(x)$ satisfac problema de frontieră (3), (4).

Din expresia (7) rezultă că vitezele de grup pentru *k=0* se transformă în zero pentru toate dependenţele dispersionale care au $\omega_n(0) \neq 0$. Revenim la soluţionarea problemei de frontieră (3), (4) pentru *k=0.* Nemijlocit, se verifică dacă valorii frecvenţei $\omega = 0$ îi corespunde soluţia nenulă $u(x) \equiv Const$ ce satisface condiţiile de frontieră şi, în aşa fel, $\omega = 0$, $u(x) \equiv Const$ este soluţia problemei spectrale (3), (4). Vom nota curba dispersională, care corespunde acestei soluţii, prin $\omega_0(k)$. Din expresia Rayleigh rezultă dependenţa asimptotică pentru $\omega_0(k)$, pentru *k<<1* [2,4]:

$$\omega_n(k) \approx \sqrt{\frac{\int_{-0.5d}^{0.5d} c_{66}(x)u_0^2(x)dx}{\int_{-0.5d}^{0.5d} \rho(x)u_0^2(x)dx}}\, k ,$$

iar luând în consideraţie (7), ajungem la concluzia că viteza de grup corespunzătoare dependenţei dispersionale $\omega_0(k)$ este diferită de zero şi este egală cu

$$v_n(0)=\sqrt{\frac{\int_{-0.5d}^{0.5d} c_{66}(x)u_0^2(x)dx}{\int_{-0.5d}^{0.5d} \rho(x)u_0^2(x)dx}}=\sqrt{\frac{\int_{-0.5d}^{0.5d} c_{66}(x)dx}{\int_{-0.5d}^{0.5d} \rho(x))dx}}\,.$$

Vom analiza comportamentul vitezelor de grup $v_n(k)$ pentru valori mari ale spectrului de undă, pentru *k>>1* din expresia Rayleigh (5). Pentru pătratul frecvenţei obţinem expresia asimptotică pentru dependenţele dispersionale [2, 4]:

$$\omega_n(k)\approx\sqrt{\frac{\int_{-0.5d}^{0.5d} c_{66}(x)u_n^2(x)dx}{\int_{-0.5d}^{0.5d} \rho(x)u_n^2(x)dx}}\,k\,,$$

iar, luând în consideraţie expresia (7), ajungem la expresia asimptotică pentru vitezele de grup pentru valorile mari ale spectrului de undă:

$$v_n(k)\approx\sqrt{\frac{\int_{-0.5d}^{0.5d} c_{66}(x)u_n^2(x)dx}{\int_{-0.5d}^{0.5d} \rho(x)u_n^2(x)dx}}\ ,\ k>>1. \qquad (8)$$

Notăm prin $\rho_{\min}$, $\rho_{\max}$ şi $c_{66}^{\min}$, $c_{66}^{\max}$ frontierele inferioare şi superioare pentru variabilele densităţii şi ale modulului elasticităţii, astfel încât $\rho_{\min}\le\rho(x)\le\rho_{\max}$, $c_{66}^{\min}\le c_{66}(x)\le c_{66}^{\max}$.

Vom reieşi din inegalitatea

$$c_{66}^{\min}\int_{-0.5d}^{0.5d} u_n^2(x)dx\le\int_{-0.5d}^{0.5d} c_{66}(x)u_n^2(x)dx\le c_{66}^{\max}\int_{-0.5d}^{0.5d} u_n^2(x)dx. \qquad (9)$$

Pentru partea stângă a inegalităţii (9) este justă expresia:

$$c_{66}^{\min}\int_{-0.5d}^{0.5d} u_n^2(x)dx=c_{66}^{\min}\int_{-0.5d}^{0.5d}\frac{\rho(x)u_n^2(x)}{\rho(x)}dx\ge\frac{c_{66}^{\min}}{\rho_{\max}}\int_{-0.5d}^{0.5d}\rho(x)u_n^2(x)dx.$$

În mod analog obţinem reprezentarea pentru partea dreaptă:

$$c_{66}^{\max}\int_{-0.5d}^{0.5d} u_n^2(x)dx=c_{66}^{\max}\int_{-0.5d}^{0.5d}\frac{\rho(x)u_n^2(x)}{\rho(x)}dx\le\frac{c_{66}^{\max}}{\rho_{\min}}\int_{-0.5d}^{0.5d}\rho(x)u_n^2(x)dx.$$

În rezultat, luând în consideraţie inegalităţile obţinute şi expresia (7), ajungem la determinarea frontierelor modificării vitezelor de grup pentru undele de deplasare în stratul cu caracteristicile mecanice variabile (pentru *k>>1*) [2, 4]:

$$\sqrt{\frac{c_{66}^{\min}}{\rho_{\max}}}\le v_n(k)\le\sqrt{\frac{c_{66}^{\max}}{\rho_{\min}}}\,,\ k>>1,\ n=0,1,2,3...$$

## 2. Rezultate numerice şi discuţii

În continuare vom prezenta calcule concrete pentru stratul cu caracteristicile mecanice constante $\rho$, $c_{44}$, $c_{66}$, când problema de frontieră (3), (4) se scrie sub forma:

$$-\rho\omega^2u(x_3)=c_{44}u''(x_3)-c_{66}k^2u(x_3),\ u'(\pm d/2)=0 \qquad (10)$$

Acum soluția problemei (3) se obține uşor în formă analitică în corespundere cu metodica standardă de soluționare a ecuației diferențiale cu coeficienți constanți şi se caută soluția fundamentală a ecuației diferențiale în (10) sub forma $u(x_3)=\exp(\gamma x_3)$, a cărei substituire în (10) conduce la $-\rho\omega^2=c_{44}\gamma^2-c_{66}k^2$ şi valorile

$$\gamma_{1,2}=\pm\kappa\,,\ \kappa=\sqrt{\frac{c_{66}}{c_{44}}k^2-\frac{\rho}{c_{44}}\omega^2}\,. \tag{11}$$

Prezentând soluția generală a ecuației diferențiale (10) sub forma $u(x_3)=C_1\sinh(\kappa x_3)+C_2\cosh(\kappa x_3)$ din condiția de îndeplinire a condițiilor de frontieră, ajungem la un sistem de ecuații omogene pentru determinarea constantelor necunoscute $C_1,\,C_2$:

$$\kappa\left(C_1\cosh\frac{\kappa d}{2}+C_2\sinh\frac{\kappa d}{2}\right)=0\,,\ \kappa\left(C_1\cosh\frac{\kappa d}{2}-C_2\sinh\frac{\kappa d}{2}\right)=0\,. \tag{12}$$

Menționăm că $\kappa=0$ este soluția sistemului (12). Acestei valori a lui $\kappa$ îi corespunde propria formă $u(x_3)\equiv Const$ şi dependența dispersională care reiese din (11) $\omega(k)=\sqrt{\frac{c_{66}}{c_{44}}}k$, unde $\omega_0=\sqrt{\frac{c_{66}}{c_{44}}}$. Condiția de soluționare a sistemului omogen (12) fiind trecerea determinantului ei în zero duce la egalitatea pentru determinarea valorilor admisibile ale lui $\kappa$ $\cosh\frac{\kappa d}{2}\sinh\frac{\kappa d}{2}=0$ sau la forma echivalentă:

$$\cosh\frac{\kappa d}{2}=0\,,\ \sinh\frac{\kappa d}{2}=0\,. \tag{13}$$

Soluții ale primei dintre ecuațiile (13) servesc valorile $\frac{\kappa d}{2}=i(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n=0,1,2,3\ldots$ ($i$ – unitate imaginară), cărora le corespund dependențele dispersionale şi formele proprii (funcții impare), Fig.1:

$$\omega_n^a(k)=\sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}(2n+1)^2\frac{\pi^2}{d^2}+\frac{c_{66}}{\rho}k^2}\ ;\ u_n^a(x_3)=C_n^a\sin\frac{(2n+1)\pi x_3}{d}\ ;\ n=0,1,2,3\ldots\ [4,5]$$

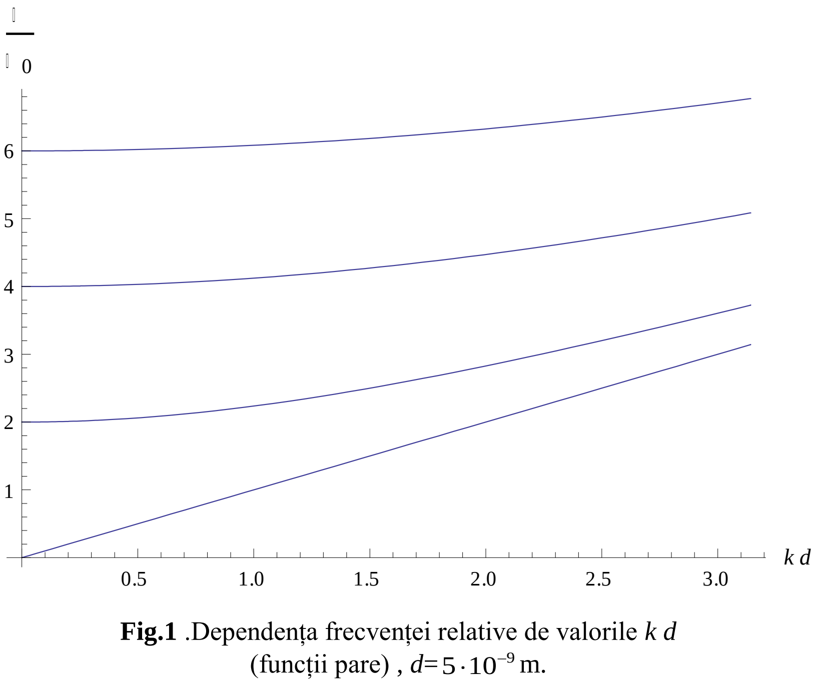


**Fig.1** .Dependența frecvenței relative de valorile *k d* (funcții pare) , $d=5\cdot10^{-9}$ m.

Soluţii ale ecuaţiei a doua în (13) sunt valorile $\frac{\kappa d}{2} = in\pi$, $n = 0,1,2,3\ldots$ ($i$ – unitate imaginară ). Acestor valori le corespund dependenţele dispersionale şi formele proprii (funcţii pare), Fig.2:

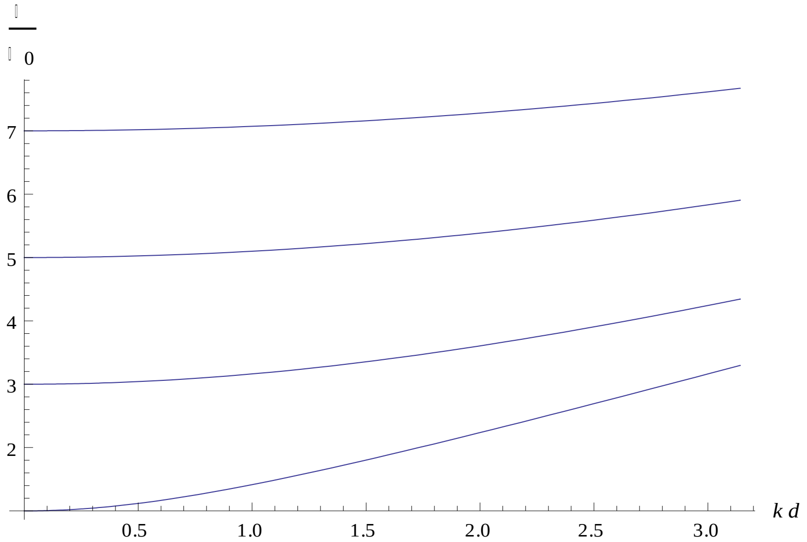


**Fig.2**. Dependenţa frecvenţei relative de valorile *kd* (funcţii impare), $d = 5 \cdot 10^{-9}$ m.

$$\omega_n^s(k) = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}(2n)^2\frac{\pi^2}{d^2} + \frac{c_{66}}{\rho}k^2}\;;\; u_n^s(x_3) = C_n^s \cos\frac{2n\pi x_3}{d}\;;\; n = 0,1,2,3\ldots$$

De menţionat că toate funcţiile proprii ale oscilaţiilor pentru problema cercetată nu depind de vectorul de undă.

La fel, menţionăm pentru vitezele de grup inegalitatea

$$v_n^s(k) = \frac{d\omega_n^s(k)}{dk} = \frac{\frac{c_{66}}{\rho}k}{\sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}(2n)^2\frac{\pi^2}{d^2} + \frac{c_{66}}{\rho}k^2}} \le \sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}} \quad \text{(Fig.3)}$$

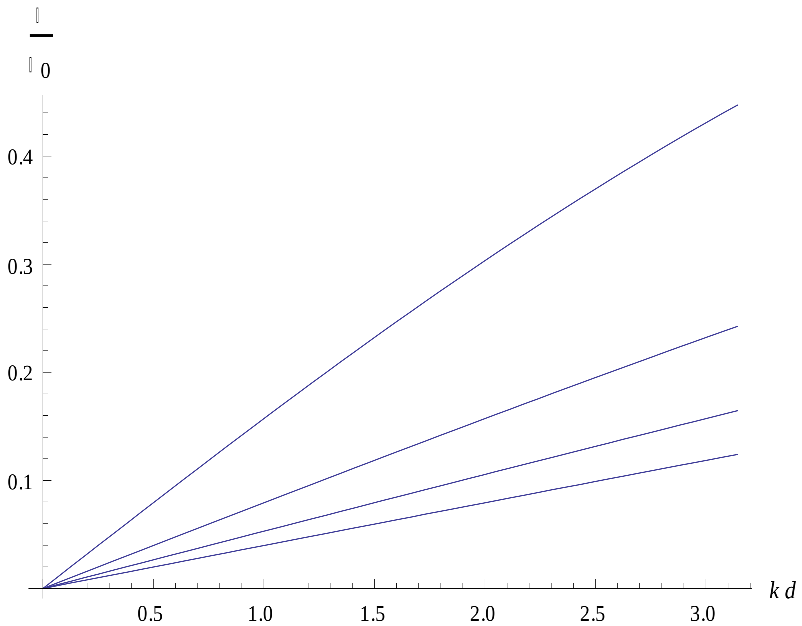


**Fig.3**. Dependenţa vitezei relative de valorile *kd* (funcţii pare), $d = 5 \cdot 10^{-9}$ m.

$$v_n^a(k)=\frac{d\omega_n^a(k)}{dk}=\frac{\frac{c_{66}}{\rho}k}{\sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}(2n+1)^2\frac{\pi^2}{d^2}+\frac{c_{66}}{\rho}k^2}}\leq\sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}} \quad \text{(Fig.4)}$$

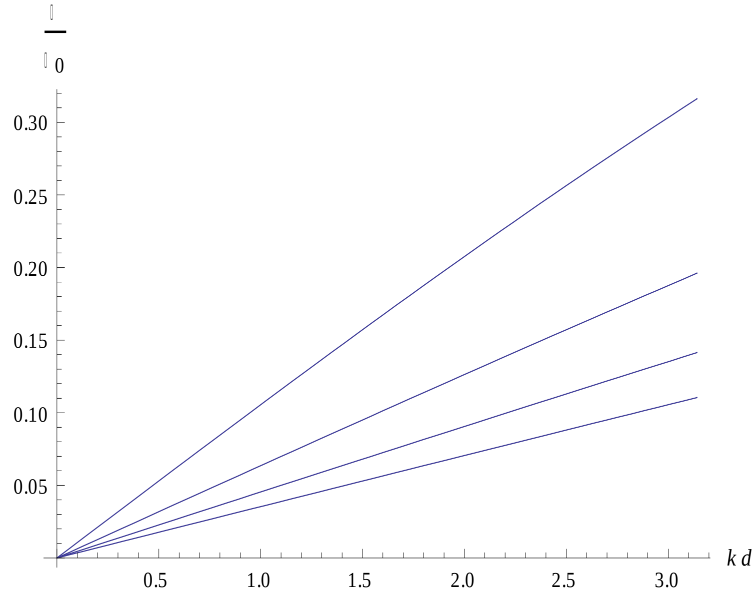


**Fig.4**. Dependenţa vitezei relative de valorile *kd* (funcţii impare), *d*= $5\cdot 10^{-9}$ m.

În aşa fel, vitezele de grup pentru toate modelele sunt mai mici decât vitezele de răspândire a undelor de deplasare în mediul cu aceleaşi caracteristici şi asimptotic se apropie de această viteză cu creşterea vectorului de undă.

**Concluzii**

În lucrare este prezentată soluţionarea problemei cu privire la răspândirea undelor elastice monocromatice în medii plan-paralele. Caracteristicile mecanice ale mediului elastic în strat sunt considerate constante în suprafeţele paralele celor de frontieră, iar tensorii deformării şi tensiunii în mediul elastic anizotrop sunt legaţi prin legea generalizată a lui Hooke. Starea tensionat-deformată a fâşiei elastice se determină în rezultatul soluţionării ecuaţiilor dinamice ale teoriei elasticităţii, ţinându-se cont de condiţiile iniţiale şi de frontieră. Se obţine expresia Rayleigh pentru frecvenţă, iar prin calcule nemijlocite se verifică dacă ecuaţia diferenţială de gradul doi faţă de amplitudinea vectorului deplasării este ecuaţia Euler pentru problema variaţională. Expresia Rayleigh pentru frecvenţele oscilaţiilor libere permite obţinerea în formă generală a expresiei pentru vitezele de grup, corespunzătoare dependenţelor dispersionale, fiind prezentată şi expresia asimptotică pentru vitezele de grup în cazul valorilor mari ale spectrului de undă. În final, au fost efectuate calcule concrete pentru stratul cu caracteristici mecanice constante şi sunt reprezentate grafic dependenţele frecvenţei relative de valorile *kd*, funcţii pare şi impare, pentru *d*= $5\cdot 10^{-9}$ m.

**Referinţe:**

1. BALANDIN, A., POKATILOV, E., NIKA, D. Phonon engineering in Hetero- and Nanostructures. In: *Journal of Nanoelectronics and Optoelectronics*, 2007, vol. 2, p.140-170.
2. CURLICOVSCHI, A., GAMURARI, V., BARSUC, A. Particularităţile spectrului fononic în heterostructuri plane. În: *Materialele Conferinţei ştiinţifice a masteranzilor şi doctoranzilor „Cercetare şi inovare – perspective de evoluţie şi integrare europeană”*, 23 septembrie 2009. Chişinău: 2009, p.93-94, IBSN 978-9975-70-863-0
3. RAYLEIGH, J.W. On the Free Vibration in an Infinite Plate of Homogenius Isotropic Elastic. In: *Matter. Proc. Math. Soc*. (London), 1889, no.20, p.225-234.

4. БАРСУК, А., ГАМУРАРЬ, В., КУРЛИКОВСКИ, А. Анализ распространения сдвиговых волн в упругом слое для континуальной и дискретной моделей слоя. În: *Materialele Simpozionului ştiinţific internaţional „Materiale noi multifuncţionale şi studierea proprietăţilor fizice şi chimice".* Chişinău, 2011, p.20-27, ISBN 978-9975-76-054-9
5. КУРАНТ, Р., ГИЛЬБЕРТ, Д. *Методы математической физики*. Москва: Директ-Медиа, 2001, том.1, с.173.
6. ЛАНДАУ, Л.Д., ЛИФШИЦ, Е.М. *Теория упругости*. Москва: Наука, 1987, с.246.

*Prezentat la 31.05.2013*