STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE

Revistă Ştiinţifică a Universităţii de Stat din Moldova, 2013, nr.7(67)

ASUPRA CONVOLUȚIILOR DE TIP SERIE DE PUTERI ÎN CAZ DISCRET

Bogdan Gheorghe MUNTEANU

Universitatea de Stat din Moldova

Clasa distribuțiilor de tip serie de puteri reuneşte o gamă largă de distribuții discrete. Componența acestei clase permite studiul distribuției duratei vieții unui sistem, caracterizată de o convoluție sumă de variabile aleatoare independente şi identic distribuite (v.a.i.i.d.) de tip discret într-un număr aleator, în care acesta are o distribuție de tip serie de puteri. Obținem astfel funcția generatoare a duratei vieții, precum şi media şi dispersia acesteia.

Cuvinte-cheie: *durată de viață, distribuție serie de puteri, convoluție, funcție generatoare.*

ON THE CONVOLUTIONS OF POWER SERIES TYPE IN THE DISCRETE CASE

The class of the power series distribution type brings together a wide range of discrete distributions. The composition of this class allows the study of lifetime distribution system, which is characterized by a convolution sum of independent and identically distributed random variables (i.i.d.r.v) of a discrete case in random number, it has a power series distribution type. Hence we obtain the generating function of the lifetime and its expectation and variation.

Keywords: *lifetime, power series distribution, convolution, generating function.*

1. Rezultate preliminarii

Nevoia de a rezolva unele probleme din Teoria Fiabilității a condus la introducerea convoluției de tip serie de puteri. Primele rezultate referitoare la clasa distribuțiilor de tip serie de puteri se datorează lui Noak [8] şi Kosambi [5], aceştia punând accent pe o parte din repartițiile de tip discret care fac parte din această clasă.

În această lucrare se prezintă în mod unitar o serie de convoluții de tip serie de puteri în caz discret.

Lucrarea este structurată astfel. În Secțiunea 2 este definită clasa repartițiilor de tip serie de puteri, fiind evidențiate elementele reprezentative ale acesteia, luându-se în considerare repartițiile discrete zero trunchiate (unde este cazul): binomială, Poisson, logaritmică, geometrică, Pascal şi binomială negativă. De asemenea, sunt prezentate proprietățile acestei clase. În Secțiunea 3, cu scopul de a determina distribuția timpului de viață văzută ca o convoluție de tip serie de puteri, se prezintă modul în care se calculează funcția generatoare a convoluției de tip serie de puteri, precum şi media şi dispersia acesteia. În Secțiunea 4 sunt aduse câteva exemple de convoluții de serie de puteri în caz discret (convoluțiile geometrică şi Pascal). Teoremele limită cu aplicații la fiabilitatea sistemelor sunt prezentate în Secțiunea 5. Concluziile din Secțiunea 6 încheie lucrarea.

2. Clasa PSD

În această secțiune vom folosi clasa de repartiții care a fost definită şi introdusă pentru prima data în lucrările lui Noak [8] şi Kosambi [5] şi utilizată pentru a studia convoluțiile similare în caz absolut continuu.

Fie Z o v.a. astfel încât $P(Z \in \{1,2,...\}) = 1$.

Definiția 2.1. Spunem că variabila aleatoare Z are distribuție de tip serie de puteri dacă

$$P(Z = z) = \frac{a_z \theta^z}{A(\theta)},\ z = 1,2,\ldots; \theta \in (0,\tau), \tau > 0, \tag{2.1}$$

unde $a_1, a_2,...$ este un şir de numere reale pozitive, τ este un număr pozitiv mărginit superior de raza de convergență a seriei de puteri (*funcția serie*) $A(\theta) = \sum_{z \geq 1} a_z \theta^z, \forall \theta \in (0,\tau)$, iar θ este parametrul putere al repartiției. Precizăm că seria de puteri $A(\theta), \theta \in (0,\tau), \tau > 0$ este o funcție nenegativă şi indefinit derivabilă.

Vom nota prin PSD (*"power series distribution"*) clasa funcțiilor de repartiție de tip serie de puteri. Dacă variabila aleatoare Z are distribuția din relația (2.1), atunci notăm că $Z \in PSD.$

În lucrarea de faţă luăm în considerare drept distribuţii din clasa PSD următoarele distribuţii: binomială, Poisson, logaritmică, geometrică, Pascal şi binomial negativă. Pentru fiecare repartiţie evidenţiem elementele caracteristice clasei PSD: şirul $(a_z)_{z\geq 1}$, funcţia serie $A(\theta)$ şi exprimarea parametrului putere θ în funcţie de parametrul ce caracterizează fiecare distribuţie în parte (*a se vedea* Tabelul 1.1.). Cel care a studiat această clasă (denumind-o *distribuţie Laplaciană,* în termeni moderni, *exponenţială liniară*) şi care a pus accent pe aceste elemente caracteristice a fost Tweedie [9], iar Lehmann a definit clasa PSD ca fiind o distribuţie exponenţială liniară discretă [7].

Consecinţa 2.1. $A(\theta)$ *este o funcţie indefinit derivabilă, iar valoarea medie şi dispersia v.a. Z sunt caracterizate, respectiv, de formulele:*

$$\mathrm{E}\,Z=\frac{\theta}{A(\theta)}\cdot A'(\theta),$$

$$\mathrm{Var}\,Z=\frac{\theta}{A(\theta)}\cdot A''(\theta)+\frac{\theta}{A(\theta)}\cdot A'(\theta)\left[1-\frac{\theta}{A(\theta)}\cdot A'(\theta)\right].$$

Demonstraţie. Observăm că $\mathrm{E}\,Z=\sum_{n\geq 1} n\frac{a_n\theta^n}{A(\theta)}=\frac{\theta}{A(\theta)}\cdot A'(\theta)$, iar

$$\mathrm{E}\,Z^2=\sum_{n\geq 1} n^2\frac{a_n\theta^n}{A(\theta)}=\sum_{n\geq 1} n(n-1)\frac{a_n\theta^n}{A(\theta)}+\sum_{n\geq 1} n\frac{a_n\theta^n}{A(\theta)}=\frac{\theta^2}{A(\theta)}\cdot A''(\theta)+\frac{\theta}{A(\theta)}\cdot A'(\theta).$$

□

Tabelul 1.1.

Elementele reprezentative ale clasei PSD pentru diferite repartiţii [4, 7, 9]

Distribuţia	a_z	θ	$A(\theta)$	τ
$Binom^*(n,p)$	$\binom{n}{z}$	$\frac{p}{1-p}$	$(1+\theta)^n-1$	∞
$Poisson^*(\lambda)$	$\frac{1}{z!}$	λ	$e^{\theta}-1$	∞
$Log(p)$	$\frac{1}{z}$	p	$-\ln(1-\theta)$	1
$Geom^*(p)$	1	$1-p$	$\frac{\theta}{1-\theta}$	1
$Pascal(k,p)$	$\binom{z-1}{k-1}$	$1-p$	$\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^k$	1
$BN^*(k,p)$	$\binom{z+k-1}{z}$	p	$(1-\theta)^{-k}-1$	1

Un rezultat foarte important, care subliniază faptul că familia distribuţiilor de tip PSD este închisă în raport cu operaţia convoluţiei, este dat de următoarea propoziţie:

Propoziţia 2.1. *Dacă* $Z_1, Z_2, \ldots$ *sunt v.a.i.i.d., cu distribuţia din clasa PSD (relaţia (2.1)), atunci v.a.* $Z=Z_1+Z_2+\ldots+Z_m,\ m\geq 1$ *are distribuţie de tip PSD.*

Demonstraţie. Vom justifica acest rezultat folosind funcţia generatoare. Fie $(Z_i)_{i=\overline{1,m}}$ un şir de v.a.i.i.d. Funcţia generatoare a unei v.a. $Z_i\in PSD, i=\overline{1,m}$ este următoarea:

$$\Psi_{Z_i}(w)=\sum_{z\geq 1}P(Z_i=z)\cdot w^z=\frac{1}{A(\theta)}\sum_{z\geq 1}a_z\cdot(w\theta)^z=\frac{A(w\theta)}{A(\theta)}.$$

În aceste condiții funcția generatoare v.a. Z este:

$$\Psi_Z(w)=\Psi_{Z_1+Z_2+..+Z_m}(w)=\prod_{i=1}^{m}\psi_{Z_i}(w)=\prod_{i=1}^{m}\frac{A(w\theta)}{A(\theta)}=\left(\frac{A(w\theta)}{A(\theta)}\right)^m=\frac{A_Z(w\theta)}{A_Z(\theta)}.$$

Din ultima relație rezultă că v.a. $Z\in PSD,\ Z=\sum_{i=1}^{m}Z_i$ cu $A_Z(\theta)=(A(\theta))^m$.

□

Remarca 2.1. Propoziția 2.1 rămâne valabilă chiar dacă renunțăm la condiția că v.a. $Z_1, Z_2,..., Z_m,\ m\geq 1$ sunt v.a. identic distribuite. Demonstrația se poate face în mod asemănător. De asemenea, acest rezultat arată că familia distribuțiilor de tip PSD este închisă în raport cu operația convoluției.

Consecința 2.1. *Dacă* $N=N_1+N_2+...+N_m\in PSD$ *şi* $(N_i)_{i=\overline{1,m}}$ *sunt v.a.i.i.d.,* $N_i\in PSD, i=\overline{1,m}$ *cu* $P(N_i=n)=\dfrac{a_n\theta^n}{A(\theta)},\ n=1,2,\ldots;\ \theta\in(0,\tau),\tau>0$, *atunci v.a.* $N\in PSD$ *are repartiția* $P(N=n^*)=\dfrac{a_{n^*}\theta^{n^*}}{A(\theta)},\ n^*=1,2,\ldots;\ \theta\in(0,\tau),\tau>0$, *unde* $A_N(\theta)=(A(\theta))^m$.

Remarca 2.2. Propoziția 2.1 arată că apartenența repartiției Pascal la clasa PSD este o consecință a unei proprietăți generale a convoluției de tip PSD în caz discret. Aceasta se vede din următorul exemplu:

Exemplu: Dacă $N_i\sim Geom^*(p)\in PSD, p>0, i=\overline{1,k}\ \overset{cf.\,Tabel\,1.1}{\Longrightarrow}\ A(\theta)=\dfrac{\theta}{1-\theta}$;

$$N=N_1+N_2+...+N_k\in PSD,\ N\sim Pascal(k,p)\ \overset{cf.\,Tabel\,1.1}{\Longrightarrow}\ A_N(\theta)=\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^k=(A(\theta))^k.$$

3. Convoluția de tip PSD în caz discret

În această secțiune ne propunem să determinăm distribuția v.a.

$Y_N=X_1+X_2+...+X_N\in PSD$, atunci când $(X_i)_{i\geq 1}$ sunt v.a.i.i.d., $X_i\in PSD, i=\overline{1,m},\ N\in PSD$ şi cunoaştem funcțiile generatoare $\psi_{X_i}(w)=\psi(w)$ şi $\Psi_N(w)=\sum_{n\geq 1}P(N=n)\cdot w^n$ ale v.a. $(X_i)_{i\geq 1}$, respectiv *N*.

Teorema 3.1. *Dacă v.a.* $N\in PSD$ *are funcția generatoare* $\Psi_N(w)=\sum_{n\geq 1}P(N=n)\cdot w^n$ *,iar v.a.* $(X_i)_{i\geq 1}$ *fiind i.i.d.,* $X_i\in PSD,$ *,* $P(X_i\in\{1,2,...\})=1$, *au funcția generatoare cunoscută* $\psi_{X_i}(w)=\psi(w),\forall i\geq 1$, *atunci v.a.* $Y_N=X_1+X_2+...+X_N\in PSD$ *şi are funcția generatoare:*

$$\psi_{Y_N}(w)=\psi_N(\psi(w)),\forall w\in D_a, \tag{3.1}$$

unde $D_a=\{a\in C\,|\,|a|\leq 1\}$.

Demonstrație. Cum v.a. $X_i \in \{1,2,...\}$, rezultă că şi v.a. $Y_N \in \{1,2,...\}$. Prin urmare, ținând cont de definiția, proprietățile funcției generatoare şi formula probabilității totale, obținem următoarele:

$$\Psi_{Y_N}(w) = \sum_{z\ge1} P(Y_N = z)\cdot w^z = \sum_{z\ge1}\left[\sum_{n\ge1} P(Y_N = z|N=n)\cdot P(N=n)\right]\cdot w^z =$$

$$= \sum_{n\ge1}\left[\sum_{z\ge1} P(Y_N = z|N=n)\cdot w^z\right]\cdot P(N=n) = \sum_{n\ge1}\left[\sum_{z\ge1} P(Y_n = z)\cdot w^z\right]\cdot P(N=n) =$$

$$= \sum_{n\ge1}\left[\sum_{z\ge1} P(X_1+X_2+\ldots+X_n = z)\cdot w^z\right]\cdot P(N=n) =$$

$$= \sum_{n\ge1}\psi_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(w)\cdot P(N=n) = \sum_{n\ge1}\left(\psi(w)\right)^n\cdot P(N=n) = \psi_N\left(\psi(w)\right).$$

□

Remarca 3.1. Funcția generatoare a v.a. $N \in PSD$

$$P(N=n) = \frac{a_n\theta^n}{A_N(\theta)},\ n=1,2,\ldots;\ \theta\in(0,\tau);\ \tau>0,$$

poate fi rescrisă astfel:

$$\Psi_N(w) = \sum_{n\ge1} P(N=n)\cdot w^n = \frac{1}{A_N(\theta)}\sum_{n\ge1} a_n\cdot(w\theta)^n = \frac{A_N(w\theta)}{A_N(\theta)} \tag{3.2}$$

În aceste condiții, relația (3.1) devine:

$$\Psi_{Y_N}(w) = \frac{A_N\left(\theta\psi(w)\right)}{A_N(\theta)}, \tag{3.3}$$

unde $\psi(w)$ este funcția generatoare a v.a. $\{X_i\}_{i\ge1}$.

Este cunoscut, după Feller [2], faptul că dacă X este o v.a. de tip discret, $\mathrm{E}|X_i|^m = \mathrm{E}|X|^m < \infty, \forall i\ge1, m\in N, m\ge1$, atunci funcția generatoare corespunzătoare este $\Psi_X(w) = \sum_{n\ge1} P(X=n)\cdot w^n = \sum_{n\ge1} p_n\cdot w^n$ şi are derivata de ordinul întâi $\Psi'(w) = \sum_{n\ge1} np_n\cdot w^{n-1}$.

Atunci

$$\Psi'(1) = \sum_{n\ge1} np_n = \mathrm{E}X, \tag{3.4}$$

iar

$$\mathrm{Var}\ X = \psi''(1) + \psi'(1) - \psi'^2(1) \tag{3.5}$$

Ținând cont de cele expuse anterior, putem formula următoarea consecință.

Consecința 3.1. *În condițiile de mai sus, media şi dispersia v.a.* Y_N *sunt caracterizate de următoarele relații:*

$$\mathrm{E}Y_N = \mathrm{E}N\cdot\mathrm{E}X \tag{3.6}$$

şi

$$\mathrm{Var}Y_N = (\mathrm{E}X)^2\cdot\mathrm{Var}N + \mathrm{E}N\cdot\mathrm{Var}X \tag{3.7}$$

Consecinţa 3.2. *Dacă* $\{N_j\}_{j=\overline{1,k}}$ *şi* $\{X_i\}_{i\geq 1}$ *sunt v.a.i., unde* $N_j \in PSD$ $P\{N_j = n\} = \dfrac{a_n^{(j)}\theta^n}{A_{N_j}(\theta)}$, $n = 1,2,...;\ \theta \in (0,\tau),\ \tau > 0$, $N = N_1 + N_2 + ... + N_k \in PSD,\ k \geq 1$, *iar* $\{X_i\}_{i\geq 1}$ *sunt v.a.i.i.d.,* $X_i \in PSD$, $P\{X_i \in \{1,2,...\}\} = 1$, *cu funcţia generatoare* $\psi_{X_i}(w) = \psi(w)$ *cunoscută oricare ar fi i ≥ 1, atunci v.a.* $Y_N = X_1 + X_2 + ... + X_N \in PSD$ *şi funcţia ei generatoare*

$$\Psi_{Y_N}(w) = \prod_{j=1}^{k}\psi_{N_j}(\psi(w)) = \prod_{j=1}^{k}\frac{A_{N_j}(\theta w)}{A_{N_j}(\theta)}, \tag{3.8}$$

unde $\Psi_{N_j}(w) = \sum_{n\geq 1} P(N_j = n)\cdot w^n$.

Consecinţa 3.3. *În condiţiile Consecinţei 3.2 au loc relaţiile* $\mathrm{E}Y_N = \sum_{j=1}^{k}\mathrm{E}Y_{N_j}$ *şi* $\mathrm{Var}Y_N = \sum_{j=1}^{k}\mathrm{Var}Y_{N_j}$.

4. Ilustrarea unor exemple privind convoluţia de tip PSD în caz discret

Vom prezenta câteva convoluţii de tip PSD cu repartiţia componentelor din sumă tot de tip PSD (*a se vedea* Tabelul 1.1.). Rezultatele prezentate în continuare sunt exprimate în termenii funcţiei generatoare.

Rezultatele sunt concentrate pe convoluţiile geometrică şi Pascal. La baza lor stau Teorema 3.1 şi Consecinţele 3.1-3.3, prin prisma cărora sunt determinate funcţia generatoare, media şi dispersia (sau chiar repartiţia în mod explicit) a repartiţiei duratei vieţii $Y_N = X_1 + X_2 + ... + X_N$ în funcţie de repartiţiile v.a. $N \in PSD$ şi v.a. $X_i \in PSD, i \geq 1$.

4.1. Convoluţia geometrică

Considerăm convoluţia geometrică de parametru $p \in (0,1)$ în funcţie de repartiţia v.a. $X_i \in PSD,\ i \geq 1$ de parametrii $p^* \in (0,1),\ k,n \in \{1,2,...\},\ \lambda > 0$ şi $\alpha^* = -\dfrac{1}{\ln(1-p^*)}$.

- **convoluţia geometrică a repartiţiei geometrice:**

$$\psi_{Y_N}(w) = \frac{pp^*w}{1-(1-pp^*)w},\ \mathrm{E}Y_N = \frac{1}{pp^*},\ \mathrm{Var}Y_N = \frac{1-pp^*}{(pp^*)^2};$$

- **convoluţia geometrică a repartiţiei Pascal:**

$$\psi_{Y_N}(w) = \frac{p(p^*w)^k}{[1-(1-p^*)w]^k - (1-p)(p^*w)^k},\ \mathrm{E}Y_N = \frac{k}{pp^*},$$

$$\mathrm{Var}Y_N = \frac{k^2(1-p)+kp(1-p^*)}{(pp^*)^2};$$

- **convoluţia geometrică a repartiţiei Poisson:**

$$\psi_{Y_N}(w) = \frac{p(e^{\lambda w}-1)}{e^{\lambda} - e^{\lambda w}(1-p) - p},\ \mathrm{E}Y_N = \frac{\lambda}{p(1-e^{-\lambda})},$$

$$\mathrm{Var}\,Y_N = \frac{(1-p)\lambda^2 + p[\lambda(1-e^{-\lambda}) - \lambda^2 e^{-\lambda}]}{p^2(1-e^{-\lambda})^2};$$

- **convoluţia geometrică a repartiţiei binomiale:**

$$\psi_{Y_N}(w)=\frac{p\left[(1-p^*+p^*w)^n-(1-p^*)^n\right]}{1-p^*(1-p^*)^n-(1-p)(1-p^*+p^*w)^n},\ \mathrm{E}Y_N=\frac{np^*}{p\left[1-(1-p^*)^n\right]},$$

$$\mathrm{Var}\,Y_N=\frac{np^*\left[(1-p)+p(1-p^*)-npp^*(1-p^*)^n-p(1-p^*)^{n+1}\right]}{p^2\left[1-(1-p^*)^n\right]^2};$$

- **convoluţia geometrică a repartiţiei logaritmice:**

$$\psi_{Y_N}(w)=\frac{p\ln(1-p^*w)^{\alpha^*}}{1-(1-p)\ln(1-p^*w)^{\alpha^*}},\ \mathrm{E}Y_N=\frac{\alpha^*p^*}{p(1-p^*)},$$

$$\mathrm{Var}Y_N=\frac{(1-2p)(\alpha^*p^*)^2+\alpha^*pp^*}{p^2(1-p^*)^2}.$$

În conformitate cu rezultatele obţinute la convoluţia geometrică a repartiţiei geometrice, putem formula următorul rezultat:

Propoziţia 4.1. *Dacă v.a.* $N\sim Geom^*(p),p\in(0,1)$, $(X_i)_{i\ge1}$ *sunt v.a.i.i.d.* $Geom^*(p^*),p^*\in(0,1)$, *v.a. N şi* $(X_i)_{i\ge1}$ *fiind independente, atunci v.a.* $Y_N\sim Geom^*(pp^*)$.

4.2. Convoluţia Pascal

Convoluţiile Pascal au la bază presupunerea că $N\sim Pascal(k,p),p\in(0,1),k\in\{1,2,...\}$. În acest caz, se observă că v.a. $Y_N=X_1+X_2+...+X_N$ are aceeaşi distribuţie ca şi v.a. $Y_{N_1}+Y_{N_2}+\ldots+Y_{N_k}$, unde $(N_j)_{j=\overline{1,k}}$ sunt v.a.i.i.d. $Geom^*(p),p\in(0,1)$, iar $Y_{N_j}\sim X_1+X_2+\ldots+X_{N_j}$ deoarece v.a. $N_1+N_2+...+N_k\sim Pascal(k,p)$. Prin urmare, folosind Consecinţele 3.2 şi 3.3, deducem că funcţia generatoare $\Psi_{Y_N}(w)=\prod_{j=1}^{k}\psi_{Y_{N_j}}(w)$, unde $\Psi_{Y_{N_j}}(w)=\frac{p\psi(w)}{1-(1-p)\psi(w)},\forall j=\overline{1,k}$, $\psi(w)$ fiind funcţia generatoare a repartiţiei v.a. $(X_i)_{i\ge1}$.

Aşadar, $\Psi_{Y_N}(w)=\left(\frac{p\psi(w)}{1-(1-p)\psi(w)}\right)^k$, iar $\mathrm{E}Y_N=\sum_{j=1}^{k}\mathrm{E}Y_{N_j}$ şi $\mathrm{Var}Y_N=\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Var}Y_{N_j}$.

Luând în calcul rezultatele obţinute în cadrul convoluţiei geometrice, obţinem următoarele:

- **convoluţia Pascal a repartiţiei geometrice**

$$\psi_{Y_N}(w)=\left[\frac{pp^*w}{1-(1-pp^*)w}\right]^k,\ \mathrm{E}Y_N=\frac{k}{pp^*},\ \mathrm{Var}Y_N=\frac{k(1-pp^*)}{(pp^*)^2};$$

- **convoluţia Pascal a repartiţiei Pascal**

$$\psi_{Y_N}(w)=\left[\frac{p(p^*w)^{k^*}}{\left[1-(1-p^*)w\right]^{k^*}-(1-p)(p^*w)^{k^*}}\right]^k,\ \mathrm{E}Y_N=\frac{kk^*}{pp^*},$$

$$\mathrm{Var}Y_N=k\frac{(k^*)^2(1-p)+k^*p(1-p^*)}{(pp^*)^2};$$

- **convoluţia Pascal a repartiţiei Poisson**

$$\psi_{Y_N}(w)=\left[\frac{p\left(e^{\lambda w}-1\right)}{e^{\lambda}-e^{\lambda w}(1-p)-p}\right]^k, \mathrm{E}Y_N=\frac{k\lambda}{p(1-e^{-\lambda})},$$

$$\mathrm{Var}\,Y_N=k\frac{(1-p)\lambda^2+p\left[\lambda\left(1-e^{-\lambda}\right)-\lambda^2e^{-\lambda}\right]}{p^2\left(1-e^{-\lambda}\right)^2};$$

- **convoluția Pascal a repartiției binomiale**

$$\psi_{Y_N}(w)=\left[\frac{p\left[\left(1-p^*+p^*w\right)^n-(1-p^*)^n\right]}{1-p^*(1-p^*)^n-(1-p)\left[1-p^*+p^*w\right]^n}\right]^k, \ \mathrm{E}Y_N=\frac{knp^*}{p\left[1-(1-p^*)^n\right]},$$

$$\mathrm{Var}\,Y_N=\frac{knp^*\left[(1-p)+p(1-p^*)-npp^*(1-p^*)^n-p(1-p^*)^{n+1}\right]}{p^2\left[1-(1-p^*)^n\right]^2};$$

- **convoluția Pascal a repartiției logaritmice**

$$\psi_{Y_N}(w)=\left[\frac{p\ln\left(1-p^*w\right)^{-\alpha^*}}{1-(1-p)\ln\left(1-p^*w\right)^{-\alpha^*}}\right]^k, \ \mathrm{E}Y_N=\frac{k\alpha^*p^*}{p(1-p^*)},$$

$$\mathrm{Var}Y_N=k\frac{(1-2p)\left(\alpha^*p^*\right)^2+\alpha^*pp^*}{p^2(1-p^*)^2}.$$

Prin analogie cu Propoziția 4.1 şi conform convoluției geometrice, deducem:

Propoziția 4.2. *Dacă v.a.* $N\sim Pascal(k,p), p\in(0,1), k\in\{1,2,...\}$*, iar* $\left(X_i\right)_{i\geq1}$ *sunt v.a.i.i.d.* $Geom^*(p^*), p^*\in(0,1)$*, N şi* $\left(X_i\right)_{i\geq1}$ *reciproc independente, atunci v.a.* $Y_N\sim Pascal(k,pp^*)$.

5. Teoreme limită pentru convoluții de tip PSD în caz discret

Date fiind convoluțiile geometrică şi Pascal şi ținând cont de proprietățile clasei PSD, obținem noi teoreme limită în care sunt implicate convoluțiile de tip PSD în caz discret.

Se impun câteva rezultate intermediare.

Lema 5.1. ([3]) *Dacă* $N\sim Geom(p), p\in(0,1)$*, atunci* $pN\Rightarrow Exp(1)$ *dacă* $p\to0$.

Propoziția 5.1. ([6]) *Dacă* $N\sim Pascal(k,p),\ k\in N^*,\ p\in(0,1)$*, atunci* $pN\underset{p\to0}{\Rightarrow}Z\sim Erlang(k,1)$.

În condițiile Propozițiilor 4.1, 4.2, 5.1 şi ale Lemei 5.1, putem formula următoarele teoreme limită:

Teorema 4.1. *Dacă* $Y_N\sim Geom^*(pp^*), p,p^*\in(0,1)$*, atunci v.a.* $pp^*Y_N\underset{p\to0}{\Longrightarrow}Exp(1)$.

Teorema 4.2. *Dacă* $Y_N\sim Pascal(k,pp^*),\ p,p^*\in(0,1),\ k\in N^*$*, atunci v.a.* $pp^*Y_N\underset{p\to0}{\Longrightarrow}Erlang(k,1)$.

Justificarea acestor teoreme rezultă imediat dacă ținem cont de Lema 5.1, respectiv de Propoziția 5.1. Observăm că Teorema 4.2. completează Teorema lui Brown [1], generalizată de noi în [6], cuprinzând şi cazul discret când componentele convoluției sunt v.a.i.i. geometric distribuite.

6. Concluzii

Abordarea în mod unitar a clasei întregi de convoluții de tip PSD ne-a permis să formulăm şi să demonstrăm noi teoreme limită cu aplicații la fiabilitatea sistemelor, mai exact – la determinarea distribuției duratei vieții atunci când aceasta se exprimă ca o sumă de v.a.i.i.d geometric în număr aleator (cu distribuție geometrică, respectiv Pascal). Distribuțiile limită în acest caz sunt exponențială, respectiv Erlang.

Referințe:

1. BROWN, M. Error bounds for exponential approximations of geometric convolutions. In: *The Annals of Probability*, 1990, vol.18, no.3, p.1388-1402.
2. FELLER, W. *An introduction to probability theory and its applications*. Vol.1. New York: John Wiley & Sons, 1965.
3. FELLER, W. *An introduction to probability theory and its applications.* Vol.2. New York: John Wiley & Sons, 1971.
4. JOHNSON, N.L., KEMP, A.W. and KOTZ, S. *Univariate Discrete Distribution*. New Jersey, 2005.
5. KOSAMBI, D.D. Characteristic properties of series distribution. In: *Proceedings of the National Institute for Science*, India, 1949, no.15, p.109-113.
6. LEAHU, A., MUNTEANU, B.Gh. and CATARANCIUC, S. Erlang Approximation on Pascal Convolution in Reliability System. In: *The 20th Conference on Applied and Industrial Mathematics*, CAIM XX, Chişinău, 2012, p.146-147.
7. LEHMANN, E.L. *Testing Statistical Hypotheses* (second edition). New York: Wiley, 1986.
8. NOAK, A. A class of random variables with discrete distribution. In: *Annals of Mathematical Statistics*, 1950, no.21, p.127-132.
9. TWEEDIE, M.C.K. Functions of a statistical variate with given means, with special reference to Laplacian distributions. In: *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 43(1947), p.41-49.

Prezentat la 12.09.2013