

ASPECTE GEOMETRICE ȘI ALGEBRICE ALE APARATULUI MATEMATIC AL

 \bar{P} – SIMETRIEI ȘI W_p – SIMETRIEI

Alexandru LUNGU

Universitatea de Stat din Moldova

În acest articol sunt studiate unele particularități geometrice și algebrice ale metodelor de deducere și descriere a structurii generale a grupurilor de tipuri diferite ale simetriilor generalizate în formă de \bar{P} – simetrie și W_p – simetrie.

Cuvinte-cheie: simetrii generalizate, grupuri, aplicații cvasiomomorfe.

**GEOMETRIC AND ALGEBRAIC ASPECTS OF MATHEMATICAL APPARATUS
OF \bar{P} – SYMMETRY AND W_p – SYMMETRY**

In the present paper there are studied some geometric and algebraic features of the method of deriving and the description of general structure of groups of different type of the generalizations of classical symmetry in form of \bar{P} – symmetry and W_p – symmetry.

Keywords: generalized symmetry, groups, quasi-homomorphe applications.

1. Cercetarea structurii generale și a proprietăților grupurilor de diferite tipuri ale generalizărilor recente ale simetriei clasice este mai complexă și mai dificilă decât problema analogică pentru grupurile de P – simetrie [9-11].

Scopul studiului efectuat este: de a analiza particularitățile specifice atât geometrice, cât și algebrice proprii generalizărilor recente ale simetriei clasice sub formă de \bar{P} – simetrie [11,17,18] și W_p – simetrie [14,19-21], apoi de a elucida complexitatea metodelor de descriere și de deducere a grupurilor de diferite tipuri ale acestor generalizări în comparație cu metodele respective, aplicate în cazul P – simetriei.

2. Generalizările simetriei clasice în sens „fizic” (simetria clasică se completează cu o legitate de transformare a „inducilor”-calități localizați în punctele figurii geometrice considerate F), cum ar fi P – simetria Zamorzaev, \bar{P} – simetria sau W_p – simetria, se deosebesc între ele printr-un șir de particularități specifice geometrice și algebrice. Simetriile generalizate ce se includ în schema P – simetriei în calitate de cazuri particulare (de exemplu, antisimetria Șubnikov [26], antisimetria multiplă [12,13], simetria de colorație Belov [8,10], antisimetria de colorație Poly [24], antisimetria de colorație Neronova-Belov [22], antisimetria multiplă de colorație [23], criptosimetria simplă și multiplă Niggli-Wondratschek [5]) se caracterizează prin faptul că punctele figurii geometrice F considerate inițial sunt înzestrate cu „indici”-calități de natură scalară (ce aparțin unei mulțimi concrete date $N = \{1, 2, \dots, m\}$), iar legea transformării „inducilor” are un caracter global, care nu depinde de poziția punctelor.

În ceea ce privește transformările de W_p – simetrie, „indicii” de asemenea sunt de natură scalară, dar legitatea de schimbare a lor este mai complexă și poartă un caracter local, adică legea de transformare a „inducilor” depinde de poziția punctelor. Vom menționa că simetria policromatică Wittke-Garrido [7] și simetria complexă Bienenstok-Ewald [1] pot fi considerate drept cazuri particulare concrete ale W_p – simetriei, care tratează problema generalizării „fizice” a simetriei clasice (cazul când „indicii” au natură scalară) în sensul cel mai larg posibil. În cazul \bar{P} – simetriei (de asemenea, a se vedea simetria magnetică Tavgher-Zaițev [25] și Q – simetria Koptik [6,15,16]) acești „indici” reprezintă niște mărimi omogene ce posedă orientare (de exemplu, vectori polari cu module egale, vectori axiali, tensori etc.). Mai mult decât atât, ei reprezintă niște calități proprii punctelor în care sunt localizați. Prin urmare, orice transformare de simetrie clasică a figurii geometrice „indexate” acționează direct nu doar asupra punctelor figurii, dar și asupra „inducilor” lor, care sunt rigid legați pe puncte. Drept consecință, orice transformare de simetrie clasică a figurii „indexate” $F^{(N)}$ generează o anumită substituție a acestor „indici”.

3. Orice transformare de simetrie generalizată \tilde{g} a unei figuri „indexate” este o transformare mixtă ce constă din două componente: prima - componenta pur geometrică g , care este o transformare de simetrie clasică, și a doua componentă, care include în sine o informație parțială sau completă despre transformarea „indicilor”-calități sub forma unei substituții p sau, respectiv, a unui cortegiu de substituții din grupul dat de definiție P (P este un grup tranzitiv de substituții pe mulțimea N).

Din definiția transformării de P -simetrie [9] urmează că componentele respective (transformarea pur geometrică g și substituția „indicilor” p) sunt absolut independente. Fiecare componentă are domeniul său de acțiune: componenta geometrică g acționează numai asupra punctelor M ale figurii „indexate” $F^{(N)}$ (neglijând „indicii” localizați în punctele respective) pe când „indicii” sunt transformați în totalitate conform substituției p . Ca urmare, se obține că aceste componente sunt comutative $gp = pg = \tilde{g}$. Operația în grupurile respective se efectuează pe componente: $g_i p_i \cdot g_j p_j = g_i g_j p_i p_j = g_k p_k$.

În ce privește orice transformare de \bar{P} -simetrie $\tilde{g} = pg$ [17], apoi mai întâi componenta geometrică g acționează și asupra punctelor M și asupra „indicilor” r localizați în ele, adică g acționează asupra punctelor „indexate” (M, r) aplicându-le pe punctele „indexate” $(g(M), g(r))$, și numai după aceasta componenta p efectuează o transformare suplimentară a „indicilor”, încât $\tilde{g}(F^{(N)}) = F^{(N)}$. Prin urmare, în grupurile de \bar{P} -simetrie componentele nu mai sunt comutative și joacă roluri diferite în operația de grup: $p_i g_i \cdot p_j g_j = p_i p_j^{g_i} g_i g_j = p_k g_k$, unde $g_k = g_i g_j$, $p_k = p_i p_j^{g_i}$, iar $p_j^{g_i} = g_i p_j g_i^{-1} = \bar{\varphi}_{g_i}(p_j)$ este imaginea lui p_j la automorfismul $\varphi(g_i) = \bar{\varphi}_{g_i} \in \text{Aut}P$.

Vorbind despre transformările mixte \tilde{g} de W_p -simetrie, trebuie să subliniem că ele sunt mult mai complexe. Anume: ele includ în sine atât informația despre transformarea propriu-zisă a punctelor figurii geometrice considerate (componenta geometrică g), cât și informația completă despre transformarea (schimbarea) „indicilor” r , localizați în punctele interioare M_k ale domeniilor fundamentale ale grupului generator (componenta a doua). În acest caz, legea de schimbare a „indicilor” este formată din elemente-substituții ce acționează local (pentru punctele diferitelor domenii fundamentale, în general, există substituții diferite). Deci, componenta a doua w a transformării $\tilde{g} = gw$ de W_p -simetrie se prezintă sub forma unui cortegiu de elemente ale grupului dat inițial de substituții P , adică $w = \langle \dots, p^{g_i}, \dots \rangle$.

4. Orice grup de P -simetrie $G^{(P)}$ este un subgrup în produsul direct al grupului de definiție P cu grupul generator G : $G^{(P)} \leq G \times P = P \times G$. În cazul \bar{P} -simetriei orice grup \tilde{G} este subgrup în produsul semidirect de dreapta al grupului de definiție P cu grupul generator G , însoțit de omomorfismul fixat $\varphi: G \rightarrow \text{Aut}P$, unde $\varphi(g) = \bar{\varphi}_g$ pentru orice $g \in G$ și $\bar{\varphi}_g(p) = gp g^{-1}$, adică $\tilde{G} \leq P \rtimes_{\varphi_{H(\Phi)}} G$. În acest caz, H este nucleul omomorfismului φ ($H = \text{Ker}\varphi$), iar Φ este imaginea completă a grupului G ($\Phi = \text{Im}\varphi \leq \text{Aut}P$).

Vom menționa că atât formularea problemei de generalizare concretă, cât și aparatul matematic al P -simetriei reprezintă un caz particular al \bar{P} -simetriei. Anume, dacă acțiunea componentei geometrice g asupra „indicilor” este trivială (g generează substituția unitate), atunci practic transformarea „indicilor” este descrisă în totalitate numai de componenta p . Mai mult decât atât, componentele geometrice g generează numai automorfismul identic al grupului de definiție P , deci operația de grup devine pe componente (cazul P -simetriei). Amintim că produsul direct $P \times G$ se obține ca un caz particular al produsului $P \rtimes_{\varphi_{H(\Phi)}} G$ atunci când $\text{Ker}\varphi = G$, iar $\Phi = i$ este automorfismul identic al grupului P .

Din esența noțiunii de simetrie generalizată „fizic”, cum sunt P –simetria și \bar{P} –simetria, rezultă că orice grup \tilde{G} de o anumită simetrie generalizată cu grupul de definiție P și grupul generator G reprezintă așa o totalitate de elemente $\tilde{g} = g^{(p)}$, încât mulțimea componentelor geometrice g formează numai de câțiva grupul generator G ($G = \{g \mid g^{(p)} \in \tilde{G}\}$), pe când mulțimea componentelor-substituții p formează o submulțime P' în grupul de definiție P ($P' = \{p \mid g^{(s)} \in \tilde{G}\} \subseteq P$). În cazul P –simetriei submulțimea P' întotdeauna este un subgrup în P : $e < P' \leq P$, pe când la \bar{P} –simetrie P' nu întotdeauna este un subgrup în grupul P . Atenționăm că P' este o submulțime cu unitatea grupului: $e \subset P' \subseteq P$. Ca rezultat, în clasificarea grupurilor de \bar{P} –simetrie pe tipuri, spre deosebire de P –simetrie, apar încă două tipuri noi: grupuri pseudominore (când $e = Q \subset P' \subset P$, dar P' nu este subgrup) și grupuri pseudomijlocii (când $e < Q \subset P' \subset P$, dar P' nu este subgrup). Vom menționa că clasificarea se face în dependență de coraportul dintre grupul de definiție P , mulțimea substituțiilor-componente P' și subgrupul transformărilor P –identice Q (unde $Q = \tilde{G} \cap P' = \tilde{G} \cap P$), care în ansamblu verifică relațiile $e \leq Q \subseteq P' \subseteq P$.

Orice grup de P –simetrie completă ($P' = P$) cu grupul generator G poate fi dedus din grupurile P și G în rezultatul pașilor următori: 1) în P și G se caută divizorii normali Q și, respectiv, H , încât grupurile-factor G/H și P/Q să fie izomorfe: $G/H \cong P/Q$; 2) se construiește izomorfismul χ al grupului-factor G/H pe grupul-factor P/Q conform regulii $\chi(gH) = pQ$; 3) se consideră reuniunea produselor obținute $gH \cdot pQ$ (teorema principală a P –simetriei) [2]. Conform acestei teoreme, se deduc grupurile majore ($e < Q = P' = P$), minore ($e = Q < P' = P$) și cele mijlocii ($e < Q < P' = P$). Celelalte tipuri ale grupurilor de P –simetrie, anume: cele semimajore ($e < Q = P' < P$), semiminore ($e = Q < P' < P$) și, respectiv, semimijlocii ($e < Q < P' < P$) pot fi deduse în mod analogic considerând în teorema principală subgrupul P' în locul grupului P .

5. În procesul de elaborare a unor metode de deducere a grupurilor de tipuri diferite ale \bar{P} –simetriei din grupul de definiție P și grupul generator G aplicația omomorfă a unui grup pe alt grup a fost generalizată (cu două niveluri de generalizare) în formă de cvasiomomorfism de dreapta al grupului pe o submulțime din alt grup [2,3,11,18]. Vom comenta pe scurt aceste aplicații cu scopul de a ilustra mai bine trăsăturile specifice ale aparatului matematic al \bar{P} –simetriei în comparație cu aparatul matematic al P –simetriei.

Fiind date grupurile G și P și omomorfismul φ cu nucleul H al grupului G pe subgrupul Φ din grupul tuturor automorfismelor lui P , aplicația ψ a grupului G în grupul P (conform legii $\psi(g) = p$) se numește cvasiomomorfism de dreapta, dacă pentru orice g_i și g_j din G $\psi(g_i g_j) = \psi(g_i) \cdot \bar{\varphi}_{g_i}[\psi(g_j)] = p_i \bar{\varphi}_{g_i}(p_j) = p_k$, unde $\bar{\varphi}_{g_i} = \varphi(g_i)$. Dacă $\text{Ker} \varphi = G$, atunci ψ degenerază în omomorfism obișnuit. Nucleul aplicației cvasiomomorfe de dreapta ψ ($\text{Ker} \psi = H'$) este un subgrup în G , care, în general, nu este un divizor normal. Imaginea completă P' a grupului G la cvasiomomorfismul de dreapta ψ ($\text{Im} \psi = P'$), în general, nu este grup, dar verifică condiția $e \subset P' \subseteq P$. Pentru orice g_i din $G \setminus H'$ vom avea că $\psi(g_i H') = p_i \neq e$ (unde e este unitatea grupului dat P); dacă $g_i H' \neq g_j H'$, atunci și $p_i \neq p_j$. În acest caz φ se numește omomorfismul însoțitor al aplicației ψ .

Aplicația $\tilde{\psi}$ a grupului G în mulțimea claselor de resturi de dreapta ale grupului P în raport cu subgrupul său adevărat Q , conform legii $\tilde{\psi}(g_i) = Qp_i$, se numește cvasiomomorfism de dreapta generalizat, dacă $\tilde{\psi}(g_i) = Qp_i$ și $\tilde{\psi}(g_j) = Qp_j$ implică egalitățile $\tilde{\psi}(g_i g_j) = Qp_i \cdot \bar{\varphi}_{g_i}(Qp_j) = Qp_k$. Pentru ca aplicația $\tilde{\psi}$ a grupului G în mulțimea claselor de resturi de dreapta ale grupului finit P în raport cu

subgrupul său adevărat Q (conform legii $\tilde{\psi}(g_i) = Qp_i$) să fie cvasiomomorfism de dreapta generalizat, este necesar și suficient ca $\bar{\varphi}_{g_i}(Q) = p^{-1}Qp$ pentru orice element g al grupului G și $Qp = \tilde{\psi}(g)$.

În orice grup \tilde{G} de \bar{P} -simetrie cu grupul generator G , nucleul H al omomorfismului însoțitor $\varphi: G \rightarrow \text{Aut}P$, subgrupul Q de transformări P -identice și subgrupul H' de simetrie ($H' = G \cap \tilde{G}$) se conține în calitate de subgrup un grup $H^{(P)}$ (cu operația de grup pe componente), care formal nu se deosebește de grupurile de P -simetrie. Din această cauză grupul $H^{(P)}$ este considerat în continuare drept grup de P -simetrie cu grupul generator H , cu același subgrup Q de transformări P -identice și cu subgrupul de simetrie H'' , unde $H'' = H' \cap H$.

Pentru grupurile finite P orice grup de \bar{P} -simetrie poate fi dedus din grupul său generator G , cunoscând nucleul H al omomorfismului însoțitor $\varphi: G \rightarrow \text{Aut}P$, făcând următorii pași: 1) se găsesc în P toate subgrupurile Q și submulțimile P' ce se descompun în clase de resturi de dreapta în raport cu Q , iar în G toate subgrupurile H' de indice egal cu puterea mulțimii tuturor claselor de resturi de dreapta ale lui P' în raport cu Q , pentru care există izomorfismul grupurilor-factor P''/Q și H/H'' , unde $e \leq Q \leq P'' \subseteq P'$, $P'' < P$, $Q \triangleleft P''$, iar $H'' = H' \cap H$ și $H'' \triangleleft H$; 2) se construiește cvasiomomorfismul de dreapta generalizat $\tilde{\psi}$ cu nucleul H' al grupului G pe mulțimea tuturor claselor de resturi de dreapta ale lui P' în raport cu Q , însoțit de omomorfismul φ cu nucleul H , și care păstrează corespondența dintre elementele lui P'' și H obținută în rezultatul izomorfismului grupurilor-factor H/H'' și P''/Q ; 3) se combină în perechi fiecare g din G cu fiecare p' din $Qp = \tilde{\psi}(g)$ și se introduce în mulțimea acestor perechi operația $p_i g_i \cdot p_j g_j = p_i \bar{\varphi}_{g_i}(p_j) g_i g_j = p_k g_k$, unde $\bar{\varphi}_{g_i} = \varphi(g_i)$ și $\bar{\varphi}_{g_i}(p_j) = g_i p_j g_i^{-1}$ (teorema principală a \bar{P} -simetriei) [3,11].

Vom menționa că pentru $Q = e$, adică pentru grupurile minore, semiminore și pseudominore, teorema principală a \bar{P} -simetriei se simplifică foarte mult, folosindu-se de acum aplicațiile cvasiomomorfe de dreapta ψ cu nucleul H' al grupului generator G pe submulțimea P' a grupului de definiție P , însoțit de omomorfismul φ cu nucleul H , care păstrează corespondența dintre elementele lui P'' și H obținută în rezultatul izomorfismului grupului-factor H/H'' pe grupul P'' , unde $e \leq P'' \subseteq P'$.

6. În ce privește W_p – simetria, aparatul matematic este mult mai complex [3,4,21], deoarece el ține cont de transformarea „indicilor” în fiecare din punctele G – echivalente, unde G este grupul generator. Vom comenta pe scurt esența și bazele teoriei generale a W_p – simetriei pentru a ilustra mai bine trăsăturile specifice și deosebiriile dintre această generalizare a simetriei clasice și alte generalizări bine cunoscute.

Construim produsul cartezian W al cōpiilor izomorfe cu P și indexate sus în dreapta cu elemente din G , adică $W = \prod_{g_i \in G} P^{g_i}$, (unde $P^{g_i} \cong P$). Fie că se dă includerea izomorfă φ a grupului G în grupul tuturor automorfismelor grupului W conform regulii $\varphi g = \bar{\varphi}_g = \bar{g}$, unde automorfismul \bar{g} acționează asupra elementelor $w = \langle \dots, p^{g_i}, \dots \rangle$ din W prin intermediul g -deplasărilor la stânga ale componentelor lor, adică $\bar{g}(w) = w^g = \langle \dots, p^{g_i g}, \dots \rangle$. Se consideră mulțimea $A = GW$ tuturor perechilor gw , unde $g \in G$ și $w \in W$, care este un grup cu legea de compoziție $g_i w_i \cdot g_j w_j = g_k w_k$, unde $g_k = g_i g_j$, $w_k = \bar{g}_j(w_i) w_j = w_i^{g_j} w_j$ iar $w_i^{g_j}(g_k) = w_i(g_j g_k)$. Grupul A este numit împletire (torsificare) standardă carteziană de stânga a grupului P cu grupul de operatori G , însoțită de deplasarea directă la stânga a componentelor. Structura algebrică obținută se notează cu simbolul $\tilde{G} Wr P$ sau cu simbolul $\tilde{G} \bar{z} P$. Este evident faptul că grupul A este un produs semidirect de stânga [2] al grupului W cu grupul de operatori G , însoțit de izomorfismul $\varphi: G \rightarrow \text{Aut}W$ cu regula $\varphi(g) = \bar{g}$.

De menționat că rolul grupurilor G și P în împletirea standardă carteziană de stânga obținută este diferit. Anume: grupul P joacă un rol pasiv, participând cu copiiile sale izomorfe în structura considerată, pe când grupul G joacă un rol activ, implicându-se prin intermediul elementelor sale în operația de grup și generând anumite automorfisme ale grupului W . Mai mult decât atât, toate automorfismele neidentice ale grupului W , generate de elementele g din grupul G prin intermediul g -deplasărilor la stânga ale componentelor din w , sunt externe. În particular, dacă W este un produs direct al copiilor izomorfe cu grupul P și indexate cu elemente din grupul G , atunci prin analogie se obține împletirea standardă directă de stânga a grupurilor P și G , care se notează cu simbolul $\bar{G} \wr P$ sau cu simbolul \bar{G}_2P .

În cazul transformărilor $g^{(w)} = gw$ de W_p -simetrie componenta pur geometrică g acționează direct nu mai asupra punctelor figurii geometrice F „indexate” și nu acționează asupra „indicilor” localizați în aceste puncte (ei sunt niște mărimi scalare analog cazului P -simetriei lui Zamorzaev). În ce privește componenta a doua w (legea de transformare a „indicilor”, unde $w \in W$), ea are o structură cu multe „componente” $w = \langle \dots, p^{s_i}, \dots \rangle$, unde „componentele” sunt nu altceva decât substituții din grupul inițial P . „Indicele” localizat în punctul $M_k = g_k(M_1)$ (unde punctul M_1 este un punct fixat de poziție generală a figurii F față de grupul G) se transformă de către componenta p^{s_k} din w [19]. Este evident că puterea mulțimii de puncte G -echivalente cu punctul M_1 coincide cu numărul de „componente” p^{s_i} în w . Amintim, că grupul W este egal cu produsul cartezian al copiilor izomorfe ale grupului inițial de definiție P , indexate cu elemente din grupul generator G .

Mulțimea $G^{(W_p)}$ transformărilor de W_p -simetrie ale unei figuri „indexate” $F^{(N)}$ formează un grup, care este subgrup în împletirea standardă carteziană de stânga a grupului inițial de substituții P cu grupul de simetrie G , însoțită de izomorfismul $\varphi: G \rightarrow \text{Aut}W$ (unde $W = \prod_{g_i \in G} P^{s_i}$, $\varphi(g) = \bar{\varphi}_g = \bar{g}$, iar $\bar{g}(w) = w^g = \langle \dots, p^{s_i}, \dots \rangle$), adică $G^{(W_p)} \leq \bar{G} \wr P$.

Mulțimea W' a tuturor componentelor w din transformările $g^{(w)} = gw = \langle g | p^{s_1}, p^{s_2}, \dots \rangle$ grupului $G^{(W_p)}$ de W_p -simetrie, în general, nu formează un grup. W' este o submulțime cu unitatea w_0 a grupului W ($w_0 \subseteq W' \subseteq W$). Subgrupul V al transformărilor W -identice ale grupului $G^{(W_p)}$ ($V = G^{(W_p)} \cap W' = G^{(W_p)} \cap W$) întotdeauna este un divizor normal în $G^{(W_p)}$. În ce privește subgrupul de simetrie H al grupului $G^{(W_p)}$ ($H = G^{(W_p)} \cap G$), el, în general, nu este un divizor normal.

Dintre proprietățile specifice ale grupurilor de W_p -simetrie ce țin de structura lor generală vom menționa doar următoarele: 1) În orice grup de W_p -simetrie $G^{(W_p)}$, cu grupul inițial de substituții P și grupul generator G , submulțimea $W' = \{w | g^{(w)} \in G^{(W_p)}\}$, subgrupul V de transformări W -identice și subgrupul de simetrie H , se conține în calitate de subgrup grupul $G_1^{(W_1)}$. Grupul $G_1^{(W_1)}$ este determinat de același grup inițial de substituții P , are grupul generator G_1 (unde $G_1 \leq G$), iar totalitatea componentelor w ce caracterizează transformarea „indicilor” formează subgrupul W_1 din W , care verifică condițiile $W_1 \leq \text{Diag}W \cong P$ și $W_1 \subset W'$). Vom menționa că grupul $G_1^{(W_1)}$ are subgrupul V_1 de transformări P -identice (unde $V_1 = V \cap \text{Diag}W$) și subgrupul de simetrie H . Grupul $G_1^{(W_1)}$ formal nu se deosebește de grupurile de P -simetrie. 2) Dacă grupul W este finit, atunci: a) $V^g = wVw^{-1}$ pentru componentele g și w ale transformărilor $g^{(w)}$ din $G^{(W_p)}$, b) orice element al clasei de resturi Hg este combinat în perechi cu fiecare element al clasei de resturi wV , iar elementele claselor diferite Hg_i și Hg_j – cu elementele claselor diferite w_iV și, respectiv, w_jV .

Fie date grupurile G și P și omomorfismul φ cu nucleul H al grupului G în grupul $AutP$, unde $\varphi(g) = \bar{\varphi}_g$ și $\bar{\varphi}_g(p) = g^{-1}pg = p' \in P$. Aplicația μ a grupului G în grupul P , conform regulii $\mu(g) = p$, se numește cvasiomorfism de stânga, dacă pentru orice g_i și g_j din G avem $\mu(g_i g_j) = \bar{\varphi}_{g_j}(\mu(g_i)) \cdot \mu(g_j) = \bar{\varphi}_{g_j}(p_i) \cdot p_j = p_k$. Dacă nucleul omomorfismului însoțitor $\varphi: G \rightarrow AutW$ al aplicației cvasiomomorfe de stânga μ a grupului G în grupul $W = \prod_{g_i \in G} P^{g_i}$ este egal cu unitatea din G (adică, dacă φ este un izomorfism), atunci μ se numește cvasiomorfism de stânga natural. Mai mult decât atât, dacă automorfismele respective $\varphi(g) = \bar{g}$ sunt generate de g –deplasările la stânga ale componentelor în w din W (adică, $\bar{g}(w) = w^g$), atunci aplicația μ se numește cvasiomorfism de stânga natural exact al grupului G în grupul W .

Aplicația $\tilde{\mu}$ a grupului G pe submulțimea X a mulțimii tuturor claselor de resturi de stânga a grupului W în raport cu subgrupul său V conform regulii $\tilde{\mu}(g) = wV$ se numește cvasiomorfism de stânga natural exact generalizat, însoțit de deplasarea la stânga directă, dacă, pentru orice $g_i, g_j \in G$, relațiile $\tilde{\mu}(g_i) = w_iV$ și $\tilde{\mu}(g_j) = w_jV$ implică $\tilde{\mu}(g_i g_j) = (w_iV)^{g_j} * w_jV = w_kV$, unde $w_iV, w_jV, w_kV \in X$.

Orice grup de $G^{(W_p)}$ de W_p -simetrie, cu grupul W finit, poate fi dedus din grupul său generator G și grupul $W = \prod_{g_i \in G} P^{g_i}$ prin pașii următori: 1) se caută în W toate subgrupurile V și submulțimile W' ce se descompun în clase de resturi de stânga față de V , iar în G toate subgrupurile H de indice egal cu puterea mulțimii claselor de resturi ale lui W' în raport cu V și pentru care există izomorfismul $\lambda: G_1/H \rightarrow W_1/V_1$, unde $G_1 \leq G, W_1 \leq DiagW, W_1 \subset W'$, iar $V_1 = V \cap DiagW$ și $V_1 \triangleleft W_1$; 2) se construiește cvasiomorfismul de stânga natural exact generalizat $\tilde{\mu}$ cu nucleul H al grupului G pe mulțimea tuturor claselor de resturi de stânga ale submulțimii W' în raport cu V conform regulii $\tilde{\mu}(g_i) = w_iV$, ce păstrează corespondența dintre elementele grupurilor-factor G_1/H și W_1/V_1 , obținută în rezultatul izomorfismului λ ; 3) se combină în perechi fiecare g din G cu fiecare w' din clasa de resturi $wV = \tilde{\mu}(g)$ și în totalitatea acestor perechi se introduce legea de compoziție $g_i w_i \circ g_j w_j = g_i g_j (w_i)^{g_j} w_j = g_k w_k$ (teorema principală a W_p -simetriei [3,21]).

Vom menționa că, în cazul W_p -simetriei, nu există grupuri minore ($w_0 = V < W' = W$) pentru generalizările netriviabile ($|P| \geq 2$, unde P este grupul de substituții inițial dat). Pentru grupurile semiminore ($w_0 = V < W' < W$) și cele pseudominore ($w_0 = V \subset W' \subset W$ și W' nu-i grup) teorema principală a W_p -simetriei se simplifică mult, folosindu-se de acum aplicațiile cvasiomomorfe de stânga naturale exacte μ cu nucleul H al grupului G pe submulțimea W' din W , însoțit de izomorfismul $\varphi: G \rightarrow AutW$ (conform regulii $\varphi(g) = \bar{g}$), care păstrează corespondența dintre elementele lui G_1 și W_1 , obținută în rezultatul izomorfismului grupului-factor G_1/H pe W_1 , unde $G_1 < G, w_0 \leq W_1 \leq DiagW$ și $W_1 \subset W'$.

Bibliografie:

- BIENENSTOCK, A. and EWALD, P.P. Symmetry of Fourier space. In: *Acta Crystallogr.*, vol.15, 1962, p.1253-1261.
- LUNGU, A. Aplicații cvasiomomorfe și produse semidirecte de grupuri. În: *Conferința științifică jubiliară „50 de ani ai USM”*. Rezumatele comunicărilor. 2-3 octombrie 1996. Chișinău, USM, 1996 p.22-24.
- LUNGU, A. *Teoria simetriei de colorație generalizată cu aplicarea extensiunilor și a împletirilor grupurilor* / Autoreferat al tezei de doctor habilitat. Chișinău, 1997.

4. LUNGU, A. The recent generalizations of colored symmetry. In: *Visual mathematics. Art and Science Electronic Journal of ISIS – Symmetry*, vol.2, 2000, no.2. 25 p. (versiunea electronică: <http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/lungu/index.html>).
5. NIGGLI, A., WONDRATSCHEK, H. Eine Versllegemeinering der Punktgruppen. *Z. Kristallogr.*, 1960, Bd. 114, p.215-231.
6. SHUBNIKOV, A.V. and KOPTSIK, V.A. *Symmetry in Science and Art*. Moskow: Nauka, 1972. (English translation: Plenum, New York, 1974).
7. WITTKE, O. et GARRIDO, J. Symetrie des polyedres polychromatiques. In: *Bull. Soc. Franc. Miner. Cristallogr.*, vol. 82, 1959, p.223-230.
8. БЕЛОВ, Н.В., ТАРХОВА, Т.Н. Группы цветной симметрии. В: *Кристаллография*, 1956, том 1, вып.1, с.4-13.
9. ЗАМОРЗАЕВ, А.М. О группах квазисимметрии (P-симметрии) В: *Кристаллография*. 1967, том 12, с.819-825.
10. ЗАМОРЗАЕВ, А.М., ГАЛЯРСКИЙ, Э.И. и ПАЛИСТРАНТ, А.Ф. *Цветная симметрия, ее обобщения и приложения*. Кишинев: Штиинца, 1978. 275 с.
11. ЗАМОРЗАЕВ, А.М., КАРПОВА, Ю.С., ЛУНГУ, А.П., ПАЛИСТРАНТ, А.Ф. *P-симметрия и ее дальнейшее развитие*. Кишинев: Штиинца, 1986.
12. ЗАМОРЗАЕВ, А.М., СОКОЛОВ, Е.И. Симметрия и различного рода антисимметрия конечных фигур. В: *Кристаллография*, 1957, том 2, вып.1, с.9-12.
13. ЗАМОРЗАЕВ, А.М. *Теория простой и кратной антисимметрии*. Кишинев: Штиинца, 1976. 283 с.
14. КОПЦИК, В.А., КОЦЕВ, И.Н. К теории и классификации групп цветной симметрии. II. W-симметрия. В: *Сообщения ОИЯИ*, P4-8068, Дубна, 1974.
15. КОПЦИК, В.А. К теории симметрии реального кристалла. В: *Проблемы кристаллологии*. Москва: МГУ, 1976, с.36-46.
16. КОПЦИК, В.А., КОЦЕВ, И.Н. КУЖУКЕЕВ, Ж.-Н.М. Беловские цветные группы и классификация магнитных структур. В: *Сообщения ОИЯИ*, P4-7513, Дубна, 1973.
17. ЛУНГУ, А.П. *К теории \bar{P} -симметрии* // Рукопись деп. в ВИНТИ 24 мая 1978 г., №1709-78 Деп., 16 с.
18. ЛУНГУ, А.П. К выводу групп Q-симметрии (\bar{P} -симметрии). В: *Кристаллография*, 1980, том 25, вып.5, с. 1051-1053.
19. ЛУНГУ, А.П. К классификации групп W-симметрии. В: *Исследования по современной алгебре и геометрии*. Кишинев: Штиинца, 1983, с.79-84.
20. ЛУНГУ, А.П. К теории групп W-симметрии. В: *Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova. Matematica*, 1992, nr.3(9), p.72-81.
21. ЛУНГУ, А.П. Универсальная методика вывода конечных групп W_p -симметрии. În: *Anale științifice ale USM. Seria „Științe reale”*. Chișinău, 1997, p.16-22.
22. НЕРОНОВА, Н.Н., БЕЛОВ, Н.В. Цветные антисимметрические мозаики. В: *Кристаллография*, 1961, том 6, вып.6, с.831-839.
23. ПАЛИСТРАНТ, А.Ф. Двумерные группы цветных симметрий и различного рода антисимметрии. В: *Кристаллография*, 1966, том 11, вып.5, с.707-713.
24. ПОЛИ, Г.И. Мозаики для групп цветной антисимметрии. В: *Кристаллография*, 1961, том 6, вып.1, с.109-111.
25. ТАВГЕР, Б.А., ЗАЙЦЕВ, В.М. *О магнитной симметрии кристаллов*. В: *ЖЭТФ*, 1956, том 30, вып.3, с.564-568.
26. ШУБНИКОВ, А.В. *Симметрия и антисимметрия конечных фигур*. Москва: Изд-во АН СССР, 1951. 172 с.

Notă: Lucrarea a fost elaborată în cadrul Proiectelor 12.839.08.07F și 11.817.08.41F.

Prezentat la 21.01.2013