SINTEZA METODELOR DE SOLUȚIONARE A UNOR CAZURI PARTICULARE ALE PROBLEMEI DE TRANSPORT PE REȚEA

Tatiana PAŞA

Catedra Tehnologii de Programare

We study some particular cases of network transport problems with convex cost functions of flow on. An ample description of the methods for solving network transport problems is given.

Introducere

Problema clasică de transport face parte din clasa largă a problemelor modelate pe rețelele de transport. În multe situații concrete din practica de zi cu zi este pusă problema de a deplasa o careva cantitate Q de materie, energie etc. din anumite locuri, numite *surse*, în alte locuri, numite *destinații*, această deplasare realizându-se pe careva *rute de legătură* precizate anticipat. Unitățile indivizibile ale cantității Q, care sunt deplasate de-a lungul rutelor între surse şi destinații, se numesc *unități de flux*, iar ansamblul rutelor, surselor, destinațiilor şi, eventual, al altor *puncte intermediare* se numeşte *rețea de transport*.

Rețeaua de transport, care descrie problema formulată, este un graf [1,2], arcele căruia indică nodurile (surse, destinații, puncte intermediare) între care poate exista legătură (şi dacă se impune de situație, limitele volumului de produs care poate fi transportat pe acea rută) pentru a transporta fluxul de produs. În aşa fel, pentru a transporta din nodul i în nodul j un flux x_{ij}, costul cheltuielilor este descris de funcția neliniară $C_{ij}(x_{ij})$. Costul total, care descrie cheltuielile necesare pentru a transporta întregul flux de produs, poate fi descris de o sumă de astfel de funcții, adică de funcția neliniară

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i,j} C_{ij}(x_{ij}).$$

Restricțiile problemei de transport sunt nişte funcții liniare:

1) suma cantităților livrate de sursa *i* nu depăşeşte disponibilul său $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1,2,...,m$;

2) suma cantităților primite de consumatorul *j* acoperă cererea sa $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1,2,...,n$.

O restricție importantă care trebuie respectată modelând problema de transport pe o rețea constă în faptul că în orice punct intermediar bunurile nici nu se produc şi nici nu se consumă. Deci, dacă într-un nod al rețelei v intră arcele pe care se transportă bunuri în volum de x_{iv} şi ies arcele pe care se transportă bunuri în volum de x_{vk}, atunci trebuie să se îndeplinească condiția $\sum_i x_{iv} = \sum_k x_{vk}$. Excepție vor face nodul-sursă, deoarece este un nod în care nu intră nici un arc (membrul stâng va fi nul) şi nodul-destinație din care nu iese nici un arc (membrul drept este nul), ceea ce, de fapt, înseamnă că în aceste noduri va avea loc, respectiv, producerea şi consumul bunurilor.

În caz general, deoarece mărimea unui volum de produs transportat nu poate fi o mărime negativă, se mai adaugă restricția de pozitivitate a valorilor care descriu volumul transportat pe rutele rețelei. În cazuri particulare, acest fapt este impus de probleme concrete din economie, sunt restricții care limitează volumul transportat pe rute de careva valori concrete, adică se cere limitarea de sus şi de jos a mărimii de flux. Aceste restricții le vom descrie cu ajutorul unor expresii de forma: $C_{ij} \geq x_{ij} \geq d_{ij}$, $i = 1,...,n$, $j = 1,...m$, unde C_{ij} şi d_{ij} sunt, respectiv, limita de sus şi limita de jos ale volumului de produs ce poate fi transportat pe ruta respectivă.

1. Formularea problemei

Fie dată rețeaua de transport [1,2], care reprezintă un graf orientat $G=(V,E)$, $|V|=n$, $|E|=m$, pe a cărei mulțime finită V de vârfuri este definită o funcție reală mărginită de producere şi consum $q: V \to R \times (\sum_{v\in V} q(v)=0)$, iar fiecărui arc $e \in E$ i se pune în corespondență funcția convexă de cost $\phi_e(x(e))$ de la mărimea fluxului $x(e)$ pe acest arc.

După cum se ştie din [3], flux în G se numeşte funcția reală $x: R \to E$ care satisface condițiile:

$$\begin{cases} \sum\limits_{e\in E^+(v)} x(e) - \sum\limits_{e\in E^-(v)} x(e) = q(v), & \forall v \in V \\ x(e) \geq 0, & \forall e \in E, \end{cases} \tag{1}$$

unde $E^+(v)$ şi $E^-(v)$ – mulțimea de arce $e \in E$, respectiv, care intră şi care ies din vârful $v \in V$.

Problema de transport pe rețeaua G cu funcțiile de producere şi de consum $q(v)$ şi cu funcțiile de cost $\phi_e(x(e))$ convexe, date de mărimea fluxurilor pe arcele $e \in E$, constă în a găsi un astfel de flux x^*, pentru care funcționalul

$$F(x) = \sum_{e\in E} \phi_e(x(e))$$

îşi atinge valoarea sa minimală, adică:

$$F(x^*) = \min_{x\in X} F(x),$$

unde X este mulțimea de soluții ale sistemului (1), care reprezintă mulțimea fluxurilor admisibile în G.

Aceasta este o problemă neliniară de transport pe rețea, care poate fi soluționată ca o problemă a programării neliniare de optimizare condiționată. Deci, problema de minimizare va lua forma:

$$F(x) \to \min,\ x \in X, \tag{2}$$

unde X este definită atât de restricții egalități:

$$h_i(x) = 0,\ i = 1,...,n, \tag{3}$$

cât şi de restricții inegalități:

$$g_j(x) \leq 0,\ j = 1,...m. \tag{4}$$

Restricțiile (3) descriu volumul de produs ce „*intră*” şi „*iese*” din fiecare vârf al rețelei. Restricțiile (4) sunt condițiile de non-negativitate $x_j \geq 0$ pentru orice arc j al rețelei. Pentru a aduce problema la forma standard, înmulțim aceste expresii cu -1 pentru a-i schimba semnul şi facem notația $g_j(x) = -x_j$, în urma căreia obținem inegalitățile $g_j(x) \leq 0$, $j = 1,...m$.

În continuare vom folosi notațiile h şi g din R^k în R^n şi R^m, definite, respectiv, de coordonatele h_i şi g_j. Deci, problema (2) - (4) poate fi scrisă sub forma:

$$F(x) \to \min,\ h(x) = 0,\ g(x) \leq 0. \tag{5}$$

Observație: În particular, când sunt impuse restricții de limitare a fluxului transportat pe rutele rețelei de transport, restricțiile sistemului (4) se vor înlocui cu restricțiile $C_j \geq x_j$, $x_j \geq d_j$ pentru $\forall x_j \in E$. Notând $g_j(x) = -(C_j - x_j)$, $j = 1,...m$ şi $g_j(x) = x_j - d_j$, $j = m+1,...2m$, obținem restricțiile: $g_j(x) \leq 0$, $j = 1,...2m$. (6)

În aşa fel, notând h şi g din R^k în R^n şi R^{2m}, definite, respectiv, de coordonatele h_i şi g_j, problema (2) - (3), (6) poate fi scrisă sub forma:

$$F(x) \to \min,\ h(x) = 0,\ g(x) \leq 0. \tag{7}$$

2. Metode de soluţionare în cazul funcţiilor de cost liniare

2.1. *Metode de soluţionare a problemelor programării liniare*

Dacă ne interesează care vor fi cheltuielile de transport necesare pentru a ajunge dintr-un punct *A* în punctul *B* al oraşului, utilizând serviciul taxi, atunci, ştiind preţul unui *km,* putem determina costul total. Ca reţea de transport pe care vom descrie problema poate fi utilizată reţeaua de străzi ale oraşului: arcurile grafului ce descriu reţeaua vor fi străzile, iar nodurile – intersecţia a cel puţin două străzi.

În cazul când restricţiile egalităţilor $h_i(x)=0$, $i=1,...,n$ din (3) şi restricţiile inegalităţilor $g_j(x)\le 0$, $j=1,...m$ din (4) sunt funcţii liniare, după cum şi funcţiile de cost sunt funcţii liniare (adică, $F(x)=\sum_{e\in E}\phi_e(x(e))$ este funcţie liniară), vom avea cazul particular al problemei care devine cunoscută ca problemă a optimizării liniare [4,5].

După cum se observă din formularea problemei, de fapt avem o problemă a programării liniare în formă standard, conform teoremei fundamentale a programării liniare ce stă la baza algoritmului simplex, care a fost elaborat în 1947 de către G.B. Dantzig.

S-a demonstrat că algoritmul nu se îndeplineşte în timp polinomial, însă a fost găsit un alt algoritm ce nu foloseşte tabelele simplex şi care este numit algoritmul de punct interior al lui Karmakar, despre care s-a demonstrat că lucrează în timp polinomial.

Dacă avem în vedere erorile de rotunjire ce apar inevitabil când se fac calcule pe calculator, orice eroare propagându-se imediat la tot tabelul, acest fapt este depăşit prin aplicarea variantei revizuite a algoritmului simplex.

2.2. *Metoda potenţialelor*

Metoda potenţialelor este prima metodă exactă de soluţionare a problemei de transport care a fost propusă în 1949 de A.V. Kantorovici şi M.C. Gavurin. Ea este o modificare a metodei simplex, care ţine cont de specificul problemei de transport. De aceea, acest algoritm nu diferă de algoritmul simplex decât prin pasul de control al funcţiei la nemărginire pe mulţimea de soluţii. Lipsa acestui pas în metoda potenţialelor este condiţionată de teorema, conform căreia problema echilibrată de transport este întotdeauna soluţionabilă.

3. Metode de soluţionare a problemei în cazul funcţiilor de cost neliniare convexe

3.1. *Problema de transport cu funcţiile de cost neliniare convexe*

În problemele programării convexe (în particular, în problemele programării liniare) orice *optim local* este în acelaşi timp şi *optim global* al problemei. Această proprietate stă la baza metodelor existente ale *programării convexe*. Dacă, însă, $F(x)$ este chiar *strict convexă*, atunci optimul global este unic.

În cazul când restricţiile egalităţi $h_i(x)=0$, $i=1,...,n$ din (3) şi restricţiile inegalităţi $g_j(x)\le 0$, $j=1,...m$ din (4) sunt funcţii liniare, iar funcţiile de cost sunt funcţii neliniare (adică, $F(x)=\sum_{e\in E}\phi_e(x(e))$ este funcţie convexă), vom avea problema optimizării convexe [6,7]. În general, metodele de optimizare cu restricţii, din care face parte problema propusă, pot fi clasificate astfel:

1. Metode bazate pe adaptarea schemei generale de optimizare nerestricţionată în cazul prezenţei restricţiilor. Aceste metode poartă numele generic de *metode gradient*.
2. Metode bazate pe utilizarea funcţiilor de penalizare, rezolvarea problemei reducându-se la o mulţime (din punct de vedere teoretic, mulţimea este infinită) de optimizări nerestricţionate.
3. Metode bazate pe plane de secţiune, principiul cărora constă în aproximarea lui X printr-o mulţime poliedrală, adică printr-o mulţime ce poate fi descrisă printr-un sistem de inegalităţi liniare. Deci, rezolvarea problemei se reduce la o secvenţă (infinită) de optimizări liniare efectuate cu ajutorul algoritmului simplex.

În baza analizei problemei propuse şi a claselor de metode existente ajungem la concluzia aplicării schemei generale de minimizare nerestricţionată.

Având în vedere că funcțiile g_l din restricții sunt liniare, ceea ce înseamnă că sunt şi convexe, iar funcția obiectiv a problemei (2)–(4) este scrisă ca o sumă de funcții $F(x)=\sum_{e\in E}\phi_e(x(e))$, fiecare de câte o singură variabilă $\phi_e(x(e))$ pentru $\forall e\in E$ sunt funcții convexe, ceea ce înseamnă că $F(x)=\sum_{e\in E}\phi_e(x(e))$ este separabilă. Vom spune că, de fapt, avem o problemă de programare separabilă care este importantă prin faptul că uşurează mult optimizarea, deoarece poate fi soluționată utilizând optimizarea independentă a termenilor.

3.2. *Metode gradient de soluționare a problemei neliniare*

Metodele de tip gradient sunt metode numerice de căutare a optimului care folosesc pentru determinarea acestuia atât valorile frontierei scop, cât şi ale derivatei ei parțiale de ordinul I în diverse puncte.

Metoda gradientului porneşte de la o aproximație inițială x^0, pe care caută să o îmbunătățească prin aplicarea unor corecții succesive orientate după direcția gradientului funcției de optimizat şi proporționale cu acesta.

Principalul neajuns al metodei gradientului constă în faptul că paşii succesivi sunt perpendiculari, ceea ce, în cazul anumitor funcții, conduce la o convergență foarte lentă. Mai precis, dacă hiper-suprafețele de nivel au o oarecare „*excentricitate*”, zig-zagul procesului iterativ amendează convergența, deoarece în acest caz direcția gradientului este mult diferită de direcția către minim. Există însă şi scheme de minimizare mult mai eficiente, dintre care cea mai puternică pare a fi metoda Davidon – Fletcher – Powell.

Pe de altă parte, aceste metode sunt eficiente în cazul în care funcția scop are curbe de contur circulare. Dacă suprafața de răspuns are curbe de contur perfect circulare, optimul se atinge printr-o singură iterație.

3.3. *Metoda multiplicatorilor Lagrange*

După cum s-a menționat, se cere soluționarea următoarei probleme convexe de minimizare (2) - (4).

În continuare, vom cerceta problema optimizării condiționate care conține numai restricții inegalități. Acest fapt nu micşorează generalitatea expunerii, deoarece restricțiile egalități pot fi reduse la restricții inegalități (restricția $h(x)=0$ este echivalentă cu restricțiile $h(x)\le 0$, $-h(x)\le 0$). Din notațiile făcute anterior, restricțiile $g_j(x)\le 0$, $j=1,...m$ sunt condițiile de non-negativitate $x_j\ge 0$, $j=1,...m$, expresii pe care, pentru a aduce problema la formă standard, le-am înmulțit cu -1 şi am notat $g_j(x)=-x_j$, $j=1,...m$.

În aceste condiții, programul convex adus la forma canonică va arăta astfel:

$$\begin{cases} F(x)\to \min, & x\in X,\\ h_i(x)\le 0, & i=1,...,2n,\\ x_j\ge 0, & j=1,...,m. \end{cases}$$

La soluționarea problemei cu restricții inegalități trebuie evidențiat faptul că este importantă convexitatea funcțiilor care figurează în program, adică convexitatea funcției F ce se minimizează şi convexitatea mulțimii de puncte admisibile X (acest fapt este garantat de convexitatea funcțiilor g_j în restricțiile inegalități).

Deşi este un rezultat de factură pur teoretică, el stă la baza multor algoritmi eficienți de rezolvare a programelor neliniare convexe. Condiția de regularitate Slater intervine în probarea suficienței condițiilor de optimalitate Kuhn - Tucker. Ea nu mai este necesară în cazul în care restricțiile programului sunt liniare.

3.4. *Utilizarea procedurii de liniarizare*

Existența pachetelor pentru soluționarea problemelor de programare liniară de dimensiuni mari cu restricții egalități şi restricții inegalități conduce la realizarea multor metode de soluționare a problemelor programării neliniare folosind procedura de liniarizare şi aplicându-se un proces iterativ. Problema formulată poate fi modificată descriind funcția neliniară a acestei probleme de primii doi membri ai descompunerii respective în seria Taylor în vecinătatea punctului x^k şi reducând-o astfel la o problemă a programării liniare, unde X este definită de restricții egalități:

$$h_i(x) = 0,\ i = 1,...,n$$

şi de restricţii inegalităţi:

$$g_i(x) \le 0,\ i = n+1,...n+m.$$

Având în vedere că pentru soluţionarea problemei neliniare de transport ca pe o problemă a programării neliniare folosind metoda aproximării liniare toate funcţiile care descriu problema satisfac condiţiile expuse mai sus, vom obţine chiar o soluţie globală.

Soluţionând problema neliniară prin metodele programării liniare, vom obţine o nouă aproximaţie x^{k+1}, care, în cazul funcţiilor neliniare, este de obicei un punct neadmisibil. Pentru a converge către valoarea optimă, este suficient ca consecutivitatea de puncte $\{x^k\}$, obţinute în rezultatul soluţionării consecutivităţii de subprobleme ale programării liniare, să satisfacă următoarea condiţie: valoarea funcţiei obiectiv $F(x)$ în x^{k+1} este mai mică decât în x^k.

Problema programării liniare, în scopul coordonării soluţiei şi minimizării erorii, este completată cu condiţia limitării lungimii pasului cu valoarea mică $\delta_j^k > 0$, cu care se mişcă într-o direcţie sau alta $\delta_j^j - \left|x_j^{k+1} - x_j^k\right| \le 0,\ j = 1,...,m$.

4. Soluţionarea problemei în cazul funcţiilor de cost neliniare concave

Dezvoltarea şi perfecţionarea, în ultimii ani, a tehnicii de calcul şi a softului impun o evoluţie a metodelor numerice, deci şi a metodelor şi algoritmilor de optimizare. Acest fapt permite soluţionarea problemelor de dimensiuni mult mai mari, care până nu demult făceau parte din grupul de probleme irezolvabile.

Utilizând proprietăţile de bază ale problemei formulate mai sus, care au fost cercetate în [8], rezultă că problema de transport pe reţea cu funcţii concave de cost de la fluxul de pe arcele reţelei întotdeauna poate fi rezolvată cu ajutorul unor algoritmi finiţi în baza alegerii grafurilor fără cicluri, construirii pentru ei a fluxurilor şi calculării valorilor funcţionalelor. Însă, astfel de algoritmi vor fi caracterizaţi în cel mai rău caz de un număr mare de operaţii. Un interes mai mare prezintă realizarea algoritmilor de soluţionare a problemei în cazul când $\phi_e(x)$, $\forall e \in E$, sunt funcţii concave, deoarece orice funcţie concavă poate fi aproximată, cu o careva exactitate, cu un şir de funcţii secvenţial - liniare.

Algoritmul propus în [9] porneşte de la o soluţie arbitrară admisibilă, adică o soluţie [10] care ar satisface condiţia de conservare a fluxului în noduri, ceea ce presupune satisfacerea următoarelor restricţii:

$$\begin{cases} \sum\limits_{e\in E^+(v)} x^0(e) - \sum\limits_{e\in E^-(v)} x^0(e) = q(v), & \forall v \in V \\ x^0(e) \ge 0, & \forall e \in E, \end{cases}$$

unde $E^+(v)$ şi $E^-(v)$ – mulţimea de arce $e \in E$, respectiv, care intră şi care ies din vârful $v \in V$.

În baza soluţiei admisibile, funcţia neliniară concavă se aproximează cu o funcţie liniară ai cărei coeficienţii sunt calculaţi în funcţie de valoarea fluxului pe arc, $C_e = \begin{cases} \dfrac{\phi_e(x^0(e))}{x^0(e)}, & x > 0, \\ F_e^{/}(0), & x = 0. \end{cases}$. Deci, reducem problema neliniară de transport la o problemă liniară de transport, pentru a cărei soluţionare există metode bine cunoscute.

Să presupunem că au avut loc $k-1$ paşi. Se compară valoarea funcţiei liniare obiectiv în soluţia obţinută la pasul k, adică $z(x^k)$, cu valoarea funcţiei neliniare obiectiv în soluţia obţinută la pasul $k-1$, adică $F(x^{k-1})$. Comparând valorile $z(x^k)$ şi $F(x^{k-1})$, putem avea două cazuri:

1. În momentul în care $z(x^k) > F(x^{k-1})$ sau $z(x^k) = F(x^{k-1})$ şi $x^k = x^{k-1}$ algoritmul se încheie şi ca soluţie optimă a problemei neliniare este primită valoarea $x^* = x^{k-1}$.

2. Dacă $z(x^k) > F(x^{k-1})$ sau $z(x^k) = F(x^{k-1})$ şi $x^k \ne x^{k-1}$, se va îndeplini încă o iteraţie şi algoritmul va fi reluat de la început.

Acest algoritm este finit, deoarece există un număr finit de soluții admisibile. Acest fapt rezultă din convexitatea mulțimii de soluții admisibile care este un poligon convex finit, ceea ce înseamnă că are un număr finit de vârfuri care şi sunt soluțiile admisibile ale problemei. Din finitudinea algoritmului rezultă obținerea soluției optime a problemei neliniare de transport pe rețea cu funcții concave de cost după un număr finit de paşi. Având în vedere că fiecare dintre soluții sunt obținute în urma unor aproximări, este evident că şi soluția optimă este o soluție aproximativă.

Remarcă: Algoritmul de soluționare a problemei de transport poate fi utilizat şi în cazul când capacitățile muchiilor sunt mărginite. În acest caz, la condițiile (1) este necesar de adăugat următoarele condiții:

$$C(e) \geq x(e) \geq d(e), \ \forall e \in E.$$

Algoritmul poate fi aplicat şi în cazul rețelei cu o singură sursă şi câteva destinații, care este descrisă de un graf orientat cu câteva noduri suspendate. În acest caz, soluția inițială va fi căutată ca un flux $x^0(e)$, $\forall e \in E$, care îndeplineşte următoarele condiții:

$$\sum_{e \in E^+(v)} x^0(e) - \sum_{e \in E^-(v)} x^0(e) = \begin{cases} p(v), & v \in V_0; \\ 0, & v \in V / V_0 \setminus \{v_0\}; \\ -\sum_{v \in V_0} p(v), & v = v_0. \end{cases} \tag{8}$$

$$x^0(e) \geq 0, \ \forall e \in E.$$

Deci, algoritmul de soluționare a problemei de transport cu o singură sursă şi câteva destinații poate fi utilizat şi în cazul când capacitățile muchiilor sunt mărginite. În acest caz, la condițiile (8) vor fi adăugate următoarele condiții:

$$C(e) \geq x(e) \geq d(e), \ \forall e \in E.$$

Problema de sinteză a rețelei cu o singură sursă [11] şi funcții arbitrare nedescrescătoare concave de cost al cheltuielilor pe arcele rețelei poate fi formulată astfel: este dat un graf orientat $G = (V, E)$, $|V| = n$, cu rădăcina $v_0 \in V$ şi mulțimea de vârfuri $V_0 \subseteq V$, numită *mulțimea de destinații*. Pentru fiecare vârf $v \in V_0$ este cunoscută mărimea $p(v)$, interpretată ca necesitatea punctului $v \in V$ în careva unitate de produs de anumit fel. Fiecărui arc $e \in E$ îi este pusă în corespondență o funcție nedescrescătoare şi concavă $\phi_e(x(e))$ a fluxului $x(e)$ pe arcul e. Trebuie găsit subgraful $G^* = (V, E^*)$, $E^* \subseteq E$, în care există un drum din vârful v_0 în oricare din vârfurile mulțimii V_0, astfel încât suma cheltuielilor pe arcele mulțimii E^* să fie minimală.

Dacă funcțiile $\phi_e(x(e))$ sunt concave şi $\phi_e(0) = 0$, $\forall e \in E$, atunci pentru problemă există un flux în rețea, fapt care implică existența unui drum ce ar uni sursa cu fiecare dintre destinațiile rețelei; deci, de fapt, $G^* = (V, E^*)$ reprezintă o arborescență cu rădăcina în v_0 şi cu mulțimea de vârfuri suspendate V_0.

În caz general, pentru $|V_0| = N$, rețeaua căutată conține nu mai mult de $N-1$ vârfuri de nod. Deci, pentru soluționarea problemei va fi necesar să se cerceteze structurile posibile cu $N-1$ vârfuri de nod şi calculul costului $L(H_i)$ pentru fiecare caz aparte. Complexitatea totală, pentru un astfel de mod de tratare a problemei, este apreciată, în cel mai rău caz, cu un număr exponențial de operații. Acest fapt ne conduce la folosirea unei astfel de soluționări a problemei numai pentru un număr relativ nu chiar mare al lui N.

Având în vedere că din sursă există câte un drum către fiecare din destinațiile mulțimii V_0, rezultă că graful astfel obținut reprezintă o arborescență cu rădăcina $v_0 \in V$ şi mulțimea vârfurilor pedante V_0. Algoritmul se bazează anume pe faptul găsirii acestor arborescențe, care se obțin astfel: se găsesc toate drumurile din v_0 în fiecare dintre destinații, apoi se face reuniunea tuturor drumurilor posibile, în urma cărui fapt se obțin nişte grafe. Grafele astfel obținute vor fi examinate dacă reprezintă o arborescență, adică vom cerceta fiecare vârf al grafului. Dacă există cel puțin unul în care intră mai mult de un arc, atunci un astfel de graf nu mai este o arborescență şi, deci, îl excludem din cercetare.

Concluzii

În acest articol a fost formulată problema de transport pe rețea cu funții convexe de cost şi analizate câteva cazuri particulare pentru care se cunosc aşa metode de soluționare, precum: metoda potențialelor, metoda gradient, metoda multiplicatorilor Lagrange şi utilizarea procedurii de liniarizare. Se propune o metodă aproximativă de soluționare a problemei în cazul funcțiilor concave de cost şi se face o sinteză a rețelei de transport cu o singură sursă.

Referințe:

1. Берж К. Теория графов и ее применение. - Москва: ИЛ, 1962.
2. Адельсон-Велинский Г.М., Диниц Е.А., Карзанов А.В. Потоковые алгоритмы. - Москва, Наука, 1975.
3. Замбицкий Д.К., Лозовану Д.Д. Алгоритмы решения оптимизационных задач на сетях. - Кишинев: Штиинца, 1983.
4. Атманов С.А. Линейное программирование. - Москва, 1981.
5. Солтан П.С., Замбицкий Д.К., Присакару К.Ф. Экстремальные задачи на графах и алгоритмы их решения. - Кишинев: Штиинца, 1974.
6. Карманов В.Г. Математическое программирование. - Москва: Наука, 1986.
7. Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. Потоки в сетях. - Москва: Мир, 1966.
8. Paşa T. Proprietățile soluționării optimale a problemei neliniare de transport pe rețea // Analele Ştiințifice ale USM. - Chişinău, 2004.
9. Paşa T., Lozovanu D. An algorithm for solving the transport problem on network with concave cost functions of flow on edges // Computer Science Journal of Moldova, 2002, vol.10, no 3.
10. Pasha T. Determining the admissible solutions for transport problems on network. - In: Second Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova. Communications. - Chişinău, 2004.
11. Paşa T. Algoritmul determinării soluțiilor admisibile şi a soluțiilor optime pentru problemele de transport pe rețea cu o singură sursă // Analele Ştiințifice ale USM. - Chişinău, 2005.

Prezentat la 26.07.2011