S T U D I A   U N I V E R S I T A T I S

Revistă ştiinţifică a Universităţii de Stat din Moldova, 2011, nr.2(42)

ОДНОМЕРНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ БИРОЗЕТОЧНЫХ *P*-СИММЕТРИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПЯТИМЕРНЫХ ГРУПП СИММЕТРИИ КАТЕГОРИИ G_{531}

Александр ПАЛИСТРАНТ

Кафедра алгебры и геометрии

În articol sunt descrise 5185 grupuri unidimensionale liniare ale 263 *P*-simetrii de burozetă ($P \sqcup G_{420}$). Cu ajutorul acestor grupuri este confirmată justeţea rezultatelor obţinute până la repartizarea *P*-simetriilor menţionate în 75 clase neizomorfe. De asemenea, este confirmată completitudinea tuturor tipurilor de grupuri Q-mijlocii pentru fiecare din cele 75 *P*-simetrii de birozetă neizomorfe între ele, luate câte una din clasele neizomorfe menţionate.

In the present paper 5185 one-dimensional linear groups of birosette *P*-symmetries at $P \sqcup G_{420}$ are determined. The trueness of previously obtained results of distribution of all noted bi-rosette groups into 75 classes and also the completeness of all manner of types of Q-mean of groups for each from 75 non-isomorphic between each other birosette *P*-symmetries, which are taken by one from each class of isomorphism and containing all 263 bi-rosette *P*-symmetries are verified by means of this groups.

1. Одномерное пространство геометрически изображается прямой. Группы симметрии такого пространства, сохраняющие инвариантной прямую, но не сохраняющие инвариантной ни одной точки на этой прямой, называются одномерными линейными группами симметрии. Таких групп две – *p1* и *pm*, составляющих категорию G_1. В символах групп симметрии категории G_1 *p* характеризует циклическую группу переносов на вектор, лежащий на прямой одномерного пространства, *1* – тождественное преобразование, а *m* – отражение от точки одномерного пространства.

В [1] с помощью различных без учета энантиоморфизма трехмерных линейных групп симметрии G_{31} и их расширений G_{31}^P с десятью кристаллографическими двумерными точечными группами симметрии *P*, задающими розеточные *P*-симметрии при $P \sqcup G_{20}$, установлено, что групп симметрии в пятимерном эвклидовом пространстве, сохраняющих в нём трехмерную плоскость и вложенную в нее прямую, то есть групп симметрии категории G_{531}, насчитывается ровно *5185*. Независимой проверке установленного количества групп симметрии категории G_{531} с помощью одномерных линейных групп симметрии G_1 и их расширений G_1^P с *263* различными с учетом энатиоморфизма четырехмерными точечными группами симметрии *P*, сохраняющими в четырехмерном пространстве две абсолютно перпендикулярные двумерные плоскости и точку их пересечения, то есть группами симметрии категории G_{420}, задающими бирозеточные *P*-симметрии при $P \sqcup G_{420}$ [2], и посвящается настоящая статья.

2. В случае, когда группа *P* подстановок качеств, приписанных точкам фигуры, последовательно изоморфна четырехмерным точечным группам симметрии категории G_{420}, геометрический способ классификации *P*-симметрий [3] приводит к *263* так называемым бирозеточным *P*-симметриям, наименование которых и само количество соответствует группам G_{420} [2].

Интересующие нас одномерные линейные группы G_1^P бирозеточных *P*-симметрий при $P \sqcup G_{420}$ строятся по образцу одномерных линейных групп *P*-симметрии G_1^P ввиду того, что бирозеточные *P*-симметрии охватываются *P*-симметрией А.М.Заморзаева [4,2]. Действительно, все различные бирозеточные группы G_{420} интерпретируются, как отмечено в [2], *10* розеточными группами симметрии G_{20}, *21* розеточной группой антисимметрии G_{20}^1, а также *85* розеточными группами G_{20}^p полной *p*-симметрии и *147* розеточными группами $G_{20}^{p'}$ полной *(p/)*-симметрии при *p=2,3,4,6*. Но антисимметрия, *p*- и *(p/)*-симметрия погружаются в схему *P*-симметрии [4]. Следовательно, одномерные линейные группы G_1^P бирозеточных *P*-симметрий при $P \sqcup G_{420}$ делятся на порождающие, совпадающие в данном случае с группами *p1* и *pm* категории G_1, старшие, младшие и средние.

Всякую одномерную линейную группу G полной бирозеточной P-симметрии можно вывести из её порождающей $S \in G_1$ путём выделения в S и P нормальных делителей H и Q, для которых существует изоморфизм фактор-группы S/H на P/Q, попарного перемножения соответствующих по изоморфизму смежных классов и объединения полученных произведений. Случаи $Q = P$, $Q = e$ и $e \subset Q \subset P$ соответствуют делению групп P-симметрии на старшие, младшие и Q-средние (основная теорема А.М. Заморзаева о P-симметрии [4]).

Вывод старших групп тривиален, так как эти группы соответствуют случаю, когда $Q = P$, поэтому изоморфизм фактор-группы S/H на P/Q возникает только в том случае, когда нормальный делитель H группы S совпадает с этой группой. Следовательно, в этом случае $P/Q = e$, а значит и $S/H = e$, откуда вытекает, что каждой точке фигуры с группой симметрии S приписывается один и тот же набор индексов, группа подстановок которых совпадает с группой P, определяющей рассматриваемую бирозеточную P-симметрию. Что касается группы G “индексированной” таким образом фигуры, то она содержит все преобразования взятой группы S и все подстановки индексов группы P, а также все возможные произведения элементов из группы S и группы P [4]. А это означает, как следует из [7], что старшая группа G при рассматриваемой бирозеточной P-симметрии разлагается в прямое произведение порождающей группы S и группы P, задающей взятую бирозеточную P-симметрию (запись $G = S \times P$). Младшие группы данной бирозеточной P-симметрии выводятся из определенной порождающей S, согласно основной теореме о P-симметрии, только в том случае, когда группа S обладает таким нормальным делителем H, что фактор-группа $S/H \sqcup P$ и задает рассматриваемую бирозеточную P-симметрию, так как для этих групп $Q = e$. Практически младшие одномерные линейные группы бирозеточных P-симметрий могут быть получены из группы симметрии $S \in G_1$ поочередной заменой в полной системе её образующих элементов преобразований симметрии на соответствующие преобразования бирозеточных P-симметрий таким образом, чтобы совокупность P_1 подстановок индексов, входящих в группу G в качестве компонентов, совпала с группой P, характеризующей взятую бирозеточную P-симметрию, а сами группы G и S были бы изоморфны [4] (метод Шубникова-Заморзаева). В этом случае каждая точка фигуры, соответствующая группе симметрии S, снабжается только одним индексом.

Наконец, Q–средние группы G бирозеточных P–симметрий выводятся из порождающей группы $S \in G_1$, согласно основной теореме о P-симметрии [4], только в том случае, если группа S обладает таким нормальным делителем H, а группа P, характеризующая рассматриваемую бирозеточную P-симметрию, обладает таким нормальным делителем Q, что фактор-группы S/H и P/Q изоморфны (запись $S/H \sqcup P/Q$). В этом случае $Q = G \cap P$ служит подгруппой Q-средней группы G бирозеточных P-симметрий, элементы которой являются P-тождественными преобразованиями группы G, то есть “индексированная” фигура, моделирующая группу G бирозеточных P-симметрий, переходит в себя при подстановке индексов, приписанных её точкам при выводе Q–средних групп G бирозеточных P-симметрий из порождающей группы S.

Таким образом, изучение Q-средних одномерных линейных групп G бирозеточных P-симметрий, где $Q = G \cap P$ есть подгруппа подстановок индексов в группе G, связано с перебиранием нетривиальных нормальных делителей группы подстановок P, задающей данную бирозеточную P-симметрию. Сам подсчет этих групп становится возможным, если предварительно выявлены младшие одномерные линейные группы бирозеточных P-симметрий, ибо, как показано в [5], число различных одномерных линейных Q-средних групп бирозеточной P-симметрий в данном семействе равно числу различных младших групп бирозеточной P_0-симметрии с той же порождающей, если фактор-группа P/Q сильно изоморфна с группой подстановок группы P_0, определяющей бирозеточную P_0-симметрию (запись $P/Q \cong P_0$). При этом в семействах изоморфных бирозеточных P-симметрий с общей порождающей совпадают не только числа различных младших групп, но и числа различных средних групп этих бирозеточных P-симметрий. Это позволяет существенно сократить (особенно при $P \sqcup G_{420}$) числовой обзор полного вывода исследуемых нами групп, так как для подсчета всех групп G_1^P бирозеточных P-симметрий нужно проделать подробные исследования не для всех 263 бирозеточных P-симметрий, а только для 75 неизоморфных – по одной бирозеточной P-симметрии из каждого класса изоморфности [2]. В настоящей работе такая возможность используется.

3. Опираясь на представленные в [2] *75* классов изоморфизма, по которым распределяются все *263* бирозеточные P-симметрии, а также на выявленные в [6] Q-средние группы каждой из 75 неизоморфных между собой бирозеточных P-симметрий, взятых по одной из всех упомянутых нами различных классов изоморфизма бирозеточных P-симметрий, осуществим числовой обзор полного вывода групп G_1^P бирозеточных P-симметрий при $P \sqcup G_{420}$, порождаемых одномерными линейными группами симметрии G_1, которыми интерпретируются все возможные группы симметрии категории G_{531} [2,6].

Итак, прямое произведение двух одномерных линейных групп категории G_1 на 263 различные бирозеточные P-симметрии при $P \sqcup G_{420}$ приводит к *526* старшим группам G_1^P, из которых две группы, $p1$ и pm, связанные с *(1,1)*-симметрией, являются исходными (порождающими) группами, а остальные *524* – существенно новыми старшими группами. Следовательно, согласно п.2 данной работы, для выявления полного количества групп G_1^P бирозеточных P-симметрий осталось определить число младших и Q-средних групп G_1^P бирозеточных P-симметрий при $P \sqcup G_{420}$.

При *(2,1)*-бирозеточной P-симметрии, совпадающей с 2-симметрией по [1], из порождающих групп G_1 выводятся три младшие группы $p^{(2)}1$; $pm^{(2)}$ и $p^{(2)}m$. Но (2,1)-симметрия входит в класс изоморфизма 2) работы [2], содержащий 8 различных P-симметрии, поэтому группы G_1 со всеми P-симметриями класса 2) порождают 24*(8×3)* младших группы G_1^P и ни одной Q-средней группы.

При *(3,1)*-бирозеточной P-симметрии, совпадающей с *3*-симметрией по [1], группы G_1 порождают только одну младшую группу $p^{(3)}1$. Но *(3,1)*-симметрия входит в класс изоморфизма 3) работы [2], содержащий четыре различных с учетом энантиоморфизма бирозеточных P-симметрии, поэтому со всеми четырьмя P-симметриями класса изоморфизма 3) работы [2] группы G_1 порождают 4*(1×4)* младших и ни одной Q-средней группы.

При *(4,1)*-бирозеточной P-симметрии, совпадающей с *4*-симметрией по [1], группы G_1 порождают только одну младшую $p^{(4)}1$ и три *(2,1)*-средние, так как *(4,1)*-симметрия обладает нормальным делителем $Q = (2,1)$, а фактор-группа $(4,1)/(2,1)\approxeq(2,1)$ [6] (см.п.2). При всех восьми различных с учетом энантиоморфизма P-симметриях класса изоморфизма 4) работы [2], содержащего взятую бирозеточную P-симметрию, таких групп категория G_1 будет порождать в 8 раз больше, то есть 1×8+3×8 =32, из которых *8* младших и *24 (2,1)*-средних.

При *(2,2)*-бирозеточной P-симметрии, совпадающей с двукратной заморзаевской антисимметрией [8], группы G_1 порождают 3 младшие группы, $\underline{pm'}$, $p'\underline{m}$ и $\underline{p'm}$, и по три *(2,1)*-, *(1,2)*- и 2^2-средние, ибо фактор-группа $(2,2)/(2,1)\approxeq(2,2)/(1,2)\approxeq(2,2)/2^2\approxeq(2,1)$ [6], а при *9* бирозеточных Р-симметриях класса изоморфизма 5) [2], к которому относится используемая нами (2,2)-симметрия, таких групп категория G_1 порождает в *9* раз больше, то есть 9×3+9×9=27+81=108 групп, из которых *27* младших и *81* Q-средняя.

При *(2/,1)*-бирозеточной P-симметрии, совпадающей с *(2/)*-симметрией по [1], группы G_1 порождают 2 младшие группы, $p^{(2}m^{/)}$ и $p^{/)}m^{(2}$, и по 3 *(2,1)*- и *(1/,1)*-средних ввиду того, что фактор-группы $(2/,1)/(2,1)\approxeq(2/,1)/(1/,1)\approxeq(2,1)$ [6]. При 7 бирозеточных P-симметриях класса изоморфизма 6) [2], сохраняющего взятую нами *(2/,1)*-симметрию, таких групп категория G_1 будет порождать в 7 раз больше, именно 7×2+7×6=14+42=56 групп, из которых 14 младших и 42 Q-средних.

При *(6,1)*-бирозеточной P-симметрии, совпадающей с *6*-симметрией по [1], группы G_1 порождают 1 младшую группу $p^{(6)}1$, 3 *две*-средние и 1 *три*-среднюю, ибо группа *(6,1)* обладает нормальными делителями *(3,1)* и *(2,1)*, по которым фактор-группа $(6,1)/(3,1)\approxeq 2$, а $(6,1)/(2,1)\approxeq 3$ [6]. При всех 16 различных с учётом энантиоморфизма бирозеточных P-симметриях, вместе с рассматриваемой *(6,1)*-симметрией из класса изоморфизма 7) [2], таких групп категория G_1 будет порождать в 16 раз больше, то есть 16×1+16×3+16×1=80, из которых *16* младших и *64* Q-средних.

При *(3/,1)*-бирозеточной *P*-симметрии, совпадающей с (*3/*)-симметрией по [1], группы G_1 порождают одну младшую $p^{(3}m^{/)}$ и *(3,1)*-среднюю, ибо фактор-группа *(3/,1)/(3,1)*≊*(2,1)*. При всех *8* различных с учетом энантиоморфизма вместе с рассматриваемой *(3/,1)*-симметрией из класса изоморфизма 8) [2] таких групп категория G_1 будет порождать в 8 раз больше. Именно 8×1+8×3=32 группы, из которых *8* младших и *24 Q*-средних.

При *(4,2)*-бирозеточной *P*-симметрии группы G_1 порождают 0 младших, 3 *(2,1)*-средних, ибо фактор-группа *(4,2)/(2,1)* ≊ *(2,2)*, по 1 *(1,2)* и 2^2-средней ввиду того, что фактор-группы (*4,2)/(1,2)* ≊*(4/2)/*2^2 ≊ *(4,1)* и по 3 *(4,1)*-,4^2-, *(2,2)*-средних, так как фактор-группы *(4,2)*-симметрии по отмеченным трём нормальным делителям сильно изоморфны группе *(2,1)* [6]. Всего категория G_1 при *(4,2)*-симметрии порождает 3×1+1×2+3×3=14 *Q*-средних групп. При всех 7 бирозеточных *P*-симметриях, вместе с взятой *(4,2)*, из класса изоморфизма 9) [2], группы симметрии G_1 порождают в 7 раз больше таких групп, именно 14×7=98 *Q*-средних групп.

При *(4',2)*-бирозеточной *P*-симметрии группы G_1 порождают 0 младших, 2 *(2,1)*-средних, ибо фактор-группа *(4',2)/(2,1)*≊ *(2/,1)*, по 1 *(1,2)*- и 2^2-средней, так как фактор-группы *(4',2)* по отмеченным нормальным делителям ≊ *(4,1),* а также по 3 *4'*- и *(2,2)*-средних, потому что фактор-группы *(4',2)* по приведенным нормальным делителям ≊ *(2,1)* [6]. Всего группы симметрии G_1 при *(4',2)*-симметрии порождают 2×1+1×2+3×2=10 *Q*-средних групп. При двух вместе с взятой из класса изоморфизма 10) бирозеточных *P*-симметриях [2] группы симметрии G_1 порождают таких групп в 2 раза больше, именно 10×2=20 *Q*-средних групп.

При *(4/,1)*-бирозеточной *P*-симметрии, совпадающей с *(4/)*-симметрией по [1], группы G_1 порождают *1* младшую $p^{(4}m^{/)}$*, 2 (2,1)*-средних, ибо *(4/,1)/(2,1)* ≊*(2/,1)*, и по 3 *(4,1)*- и *(2/,1)*-средних, в связи с тем, что фактор-группы *(4/,1)* по двум отмеченным нормальным делителям ≊ (2,1) [6]. Таким образом, группы симметрии G_1 с *(4/,1)*-симметрией порождают 1×1+2×1+3×2=9 групп, из которых 1 младшая и 8 *Q*-средних. При всех *10* различных с учетом энантиоморфизма бирозеточных *P*-симметриях из класса изоморфизма 11), к которому относится *(4/,1)*-симметрия [2], таких групп категория G_1 будет порождать в 10 раз больше, именно 10×1+8×10=90 групп, из которых *10* младших и *80 Q*-средних.

При *(4'/)*-бирозеточной *P*-симметрии группы G_1 порождают 1 младшую $p^{(4'}m^{/)}$, 3 *(2,1)*-средних, ибо *(4'/)/(2,1)* ≊ *(2,2)*, а также по 3 *4'*-, *(2/,1)*- и (2/')-средних, так как фактор-группы группы *(4'/)* по отмеченным нормальным делителям ≊ *(2,1)* [6], то есть всего 1×1+3×1+3×3=13 групп, из которых 1 младшая и 12 *Q*-средних. При всех 6 бирозеточных *P*-симметриях, вместе с рассматриваемой *(4'/)*-симметрией из класса изоморфизма 12) [2], таких групп категория G_1 будет порождать в 6 раз больше, именно 6×13=78 групп, из которых *6* младших и *72 Q*-средних.

При *(2/,2)*-бирозеточной *P*-симметрии группы симметрии G_1 порождают 0 младших, по 3 *(2,1)*-, *(1/,1)*- и *(1/²)*-средних, так как фактор-группы *(2/,2)* по отмеченным трем нормальным делителям ≊*(2,2)*, по 2 2^2- и *(1,2)*-средних, ибо фактор-группы *(2/,2)* по приведенным двум нормальным делителям ≊ *(2/,1)* а также по 3 *(2/,1)*-, *(2/²)*-, *(2²/)*-, *(1/²)*, и *(2,2)*-средних ввиду того, что фактор-группы *(2/,2)* по выписанным пяти нормальным делителям ≊ *(2,1)* [6]. Всего категория G_1 с *(2/,2)*-симметрией порождает 0 младших + 3×3+2×2+3×5=28 групп, из которых 0 младших и 28 *Q*-средних. При всех 6 бирозеточных *P*-симметриях, вместе с рассмотренной *(2/,2)* из класса изоморфизма 13) [2], таких групп будет в 6 раз больше, именно 6×28=168 групп, из которых 0 младших и 168 *Q*-средних.

Класс изоморфизма 14) содержит одну *(2²/,1/)*-бирозеточную *P*-симметрию [2]. При этой *P*-симметрии группы G_1 порождают 0 младших, по 3 2^2-, *(1,1/)*-, *(1/,1)*-, *(1/')*- и *(1/²)*-средних ввиду того, что фактор-группы *(2²/,1/)* по пяти приведенным нормальным делителям □ *(2,2)*, две *2'*-средних, так как *(2²/,1/)/2'* ≊ *(2/,1)*, а также по 3 *(2²/)*-, *(2²,1/)*- , *(1/,1/)*-, *(1/²,1/)*-, *(2²/1/)*-, *(2'/1/)*- и *(2'/²)*-средних, ибо фактор группы *(2²/,1/)* по перечисленным семи нормальным делителям ≊ *(2,1)* [6]. Всего группы G_1 при *(2²/,1/)*-симметрии порождают 0 младших + 3×5+2×1+3×7 = 38 групп, из которых 0 младших и 38 *Q*-средних.

Класс изоморфизма 15) содержит одну *(2/',2)*-бирозеточную *P*-симметрию [2]. При этой *P*-симметрии рассматриваемые нами группы симметрии G_1 порождают 0 младших, по 2 *(2,1)-, (1,2)-* и 2^2-средним, ибо фактор-группы *(2/',2)* по трем отмеченным нормальным делителям ≅ (2/,1), 3 (1/')-средние, так как фактор-группа *(2/',2)/(1/')* ≅*(2,2),* а также по 3 *(2/')-, (2,2)-, (1/',2)-* и *(2^2/')*-средних ввиду того, что фактор-группы *(2/',2)* по четырем приведенным нормальным делителям ≅ *(2,1)* [6]. Всего группы симметрии категории G_1 при *(2/',2)*-бирозеточной *P*-симметрии класса изоморфизма 15) порождают 0 младших + 2×3+3×1+3×4 = 21 *Q*-среднюю группу.

Класс изоморфизма 16) содержит одну *(3,3)*-бирозеточную *P*-симметрию [2]. Группы категории G_1 при этой *P*-симметрии порождают 0-младших и по 1 *(3,1)-, (1,3)-,* 3^3- и 3^{-3}-средней группе ввиду того, что фактор-группы *(3,3)* по четырём указанным нормальным делителям ≅ (3,1) [6], а всего 1×4 = 4 *Q*-средних группы.

Класс изоморфизма 17), представленный группой *(3,4)*, содержит 4 бирозеточные *P*-симметрии [2]. Группы симметрии G_1 при *(3,4)*-симметрии порождают 1 *(1,2)*-среднюю группу ввиду того, что *(3,4)/(1,2)*≅ *(6,1)*, одну *(3,1)*-среднюю группу, так как *(3,4)/(3,1)* ≅ *(4,1)*, одну *(1,4)*-среднюю группу, ибо *(3,4)/(1,4)* ≅ *(3,1)*, а также 3 *(3,2)*-средних группы, потому что *(3,4)/(3,2)* ≅ *(2,1)* [6]. Таким образом, группы G_1 при *(3,4)*-симметрии порождают 6 *Q*-средних групп. При всех бирозеточных Р-симметриях класса изоморфизма 17), таких групп будет в 4 раза больше, именно 4×6=24 *Q*-средних группы.

Класс изоморфизма 18), представленный группой *($3/^4$)*-симметрии, содержит 2 бирозеточные *P*-симметрии [2]. Группы симметрии G_1 при *($3/^4$)*-симметрии порождают 1 *(3,1)*-среднюю, поскольку *($3/^4$)/(3,1)* ≅ *(4,1),* 1 *(1,2)*-среднюю, так как *($3/^4$)/(1,2)* ≅ *(3/,1)*, а также 3 *(3,2)*-средних ввиду того, что *($3/^4$)/(3,2)* ≅ *(2,1)*[6]. Следовательно, группы G_1 при *($3/^4$)*-симметрии порождают 1×1+1×1+3×1=5 *Q*-средних групп. При всех бирозеточных *P*-симметриях класса изоморфизма 8) таких групп будет вдвое больше, именно 2×5=10 *Q*-средних.

Класс изоморфизма 19), представленный группой *(6,2)*, содержит 8 различных с учетом энантиоморфизма бирозеточных *P*-симметрий [2]. При *(6,2)*-симметрии группы симметрии G_1 порождают по *1 (2,1)-, (1,2)-* и 2^2-средней, ибо фактор-группы *(6,2)* по выписанным трем нормальным делителям ≅*(6,1),* 3 *(3,1)*-средних, так как *(6,2)/(3,1)* ≅ *(2,2),* по *3 (6,1)-, (3,2)-* и 6^2-средних ввиду того, что фактор-группы *(6,2)* по указанным трем нормальным делителям ≅ (2,1), а также 1 *(2,2)*-среднюю, поскольку *(6,2)/(2,2)* ≅ *(3,1)* [6]. Всего при обобщении групп G_1 с *(6,2)*-симметрией различается 1×3+3×1+ 3×3+1×1=16 *Q*-средних групп. При всех бирозеточных *P*-симметриях таких групп будет в 8 раз больше, именно 16×8 =128 *Q*-средних групп.

Класс изоморфизма 20), представленный группой *(2/,3)*, содержит 4 бирозеточных *P*-симметрии [2]. Рассматриваемые нами группы G_1 при их обобщении с *(2/,3)*-симметрией порождают по 1 *(2,1)-* и *(1/,1)*-средней, так как фактор-группы *(2/,3)* по отмеченным двум нормальным делителям ≅ (6,1), 2 (1,3)-средние, ибо *(2/,3)/(1,3)* ≅ *(2/,1),* а также по 3 *(1/,3)-* и *(2,3)*-средних, поскольку фактор-группы *(2/,3)* по выписанным двум нормальным делителям ≅ (2,1) [6]. Следовательно, при *(2/,3)*-симметрии группы G_1 порождают 1×2+2×1+3×2=10 *Q*-средних групп. При всех бирозеточных *P*-симметриях класса изоморфизма 20) таких групп будет в 4 раза больше, именно 10×4=40 *Q*-средних групп.

Класс изоморфизма 21), представленный группой *(6/,1)*, содержит 16 различных с учетом энантиоморфизма бирозеточных *P*-симметрий [2]. Постоянно используемые нами группы симметрии G_1 при их обобщении с *(6/,1)*-симметрией, совпадающей с *(6/)*-симметрией по [1], порождают только одну младшую $p^{(6}m^{/)}$, 1 *(2,1)*-среднюю ввиду того, что *(6/,1)/(2,1)* ≅ *(3/,1),* 2 *(3,1)*-средних, так как *(6/,1)/(3,1)*≅ *(2/,1)*, а также по 3 *(6,1)-* и *(3/,1)*-средних, ибо фактор-группы *(6/,1)* по приведенным двум нормальным делителям ≅ *(2,1)* [6]. Таким образом, группы G_1 при *(6/,1)*-симметрии порождают 1×1+1×1+2×1+3×2=10 новых групп, из которых 1 младшая и *9 Q*-средних. При всех бирозеточных

P-симметриях класса изоморфизма 21) таких групп будет в 16 раз больше, именно 10×16=160 групп, из которых 16 младших и 144 средних. При остальных 54 классах изоморфизма бирозеточных *P*-симметрий взятая нами категория G_1 не порождает младших групп.

В свою очередь, класс изоморфизма 22), представленный группой *(3/,2)*, содержит 12 бирозеточных *P*-симметрий [2]. При обобщении групп G_1 с *(3/,2)*-симметрией рассматриваемого класса изоморфизма получаем 1 *(1,2)*-среднюю группу ввиду того, что *(3/,2)/(1,2)* ≊ *(3/,1),* 3 *(3,1)*-средних группы, так как *(3/,2)/(3,1)*≊ *(2,2)*, а также по 3 *(3,2)-,(3/,1)-* и *(3/^{2})*-средних группы, поскольку фактор-группы *(3/,2)* по перечисленным трем нормальным делителям ≊ *(2,1)* [6]. При всех 12 бирозеточных *P*-симметриях класса изоморфизма 22) таких групп будет в 12 раз больше, именно 12·(1×1+3·1+3×3) = 12×13=156 *Q*-средних групп.

При *(2/,2/)*-симметрии, представляющей класс изоморфизма 23) бирозеточных *P*-симметрий [2], группы G_1 порождают по 2 *(2/,1)-, (1,2/)-, (2/^{2})-, (2',2)-, (2^2/)-, (2^2,1/)-, (2^2/')*-средних ввиду того, что фактор-группы *(2/,2/)* по отмеченным семи нормальным делителям ≊*(2/,1)*, по 3 *(2,2)-, (1/,1/)-, (2/')-, (1/',2)-,(2,1/)-(1/,2)-,(2'/)-,(1/^{2},1/)-* и *(2'/^{2})*-средних, ибо фактор-группы *(2/,2/)* по выписанным девяти нормальным делителям ≊ *(2,2)*, по 3 *(2/,2)-, (2/,1/)-, (2,2/)-, (1/,2/)-, (2'/,2)-, (2/',2)-, (2/^{2},1/)-* и *(2^2/,1/)*-средних, так как фактор-группы (2/,2/) по представленным восьми нормальным делителям ≊*(2,1)* [6]. Всего новых групп при *(2/,2/)*-симметрии насчитывается 2×7+3×9+3×8=65 *Q*-средних.

При *(4,4)*-симметрии, представляющей класс изоморфизма 24) бирозеточных *P*-симметрий [2], группы G_1 порождают 3 *(2,2)*-средние, ибо *(4,4)/(2,2)* ≊ *(2,2)* ≊ по 1 *(4,1)-,(1,4)-, 4^4, 4^{-4}, 4^2* и 2^4- средней ввиду того, что фактор-группы *(4,4)* по отмеченным 6 нормальным делителям ≊ *(4,1),* а также по 3 *(4,2)-,(2,4)-* и *(4^4,2)*-средних, так как фактор-группы (4,4) по представленным трём нормальным делителям ≊ *(2,1)* [6]. Таким образом, группы симметрии G_1 при (4,4)-симметрии, составляющей весь класс изоморфизма 24) бирозеточных *P*-симметрий, порождают 3×1+1×6+3×3=18 *Q*-средних групп.

Класс изоморфизма 25) бирозеточных *P*-симметрий, представленный группой (2/,4), содержит 2 бирозеточные *P*-симметрии [2]. При *(2/,4)*-симметрии интересующие нас группы G_1 порождают по 1 *(2/,1)-, (2/^{2})-* и *2^2/)*-средней, потому что фактор-группы *(2/,4)* по выписанным трём нормальным делителям ≊ (4,1), по 2 *(1,4)-* и *2^4*-средние, так как фактор-группы *(2/,4)* по отмеченным двум нормальным делителям ≊ *(2/,1),* по 3 *(2,2)-, (1/^{4})-* и *(1/,2)*-средних, ибо фактор-группы *(2/,4)* по приведенным трём нормальным делителям ≊ *(2,2)*, а также по 3 *(2/,2)-, (2,4)-, (2/^{4})-, (2^4/)-* и *(1/,4)*, ибо фактор-группы *(2/,4)* по перечисленным пяти нормальным делителям ≊ *(2,1)* [6]. Всего полученных групп будет 1×3+2×2+3×3+3×5=31. При всех *P*-симметриях класса изоморфизма 25) таких групп будет в 2 раза больше, то есть 31×2=62 *Q*-средних группы.

Класс изоморфизма 26), представленный группой *(4/,2)*, содержит 6 бирозеточных *P*-симметрий [2]. При *(4/,2)*-симметрии группы G_1 порождают по 1 *(1,2)-* и *2^2*-средней, так как фактор-группы *(4/,2)* по указанным двум нормальным делителям ≊ *(4/,1)*, по *3 (4,1)-, (2/,1)-* и *(2/^{2})*-средних, ибо фактор-группы *(4/,2)* по приведенным трём нормальным делителям ≊ *(2,2)*, по 2 *(2,2)-* и *4^2*-средние, ибо фактор-группы *(4/,2)* по двум отмеченным нормальным делителям ≊ *(2/,1)*, по 3 *(4/,1)-, (4/^{2})-, (4^2/)-, (4,2)-* и *(2/,2)*-средних ввиду того, что фактор-группы *(4/,2)* по перечисленным пяти нормальным делителям≊*(2,1)* [6]. Всего таких групп категория G_1 при *(4/,2)*-симметрии порождает 1×2+3×3+2×2+3×5=30 *Q*-средних. При всех 6 бирозеточных *P*-симметриях класса изоморфизма 26) таких групп будет в 6 раз больше. Именно 30×6=180 *Q*-средних.

Класс изоморфизма 27), представленный группой *(4^2/,1/)*, содержит 4 бирозеточные *P*-симметрии [2]. Группы G_1 при *(4^2/,1/)*-симметрии порождают по 1 *(1,1/)*- и 2'-средней, ибо фактор-группы *(4^2/,1/)* по отмеченным двум нормальным делителям ≊ *(4'/)*, по 3 *4^2- , (2/,1)-, 4'-, (2,1/)-, (2/^{2})-* и *(2/')*-средних ввиду того, что фактор-группы *(4^2/,1/)* по выписанным 6 нормальным делителям ≊ *(2,2),* по

3 $(4^2/)$-, $(4^2/')$-, $(2/,1/)$, $(4'/)$- и $(4'/^2)$-средних, поскольку фактор-группы $(4^2/,1/)$ по перечисленным 5 нормальным делителям ≊ $(2,1)$ [6]. Отсюда следует, что категория G_1 при $(4^2/,1/)$-симметрии порождает 1×2+3×6+3×5=35 Q-средних групп. При всех 4 бирозеточных P-симметриях класса изоморфизма 27) таких групп будет в 4 раза больше, именно 35×4=140 Q-средних.

Далее, класс изоморфизма 28), представленный группой $(4/',2)$, содержит 4 бирозеточные P-симметрии [2]. При $(4/',2)$-симметрии классические группы G_1 порождают по 1 $(1,2)$- и 2^2-средней ввиду того, что фактор-группы $(4/,'2)$ по отмеченным двум нормальным делителям ≊ $(4/,1)$, по 2 $(4,1)$-, $(2,2)$- и 4^2-средних, поскольку фактор-группы по выписанным трем нормальным делителям ≊ $(2/,1)$, 3 $(2/')$-средних, ибо $(4/',2)/(2/')$ ≊ $(2,2)$, по 3 $(4/')$-, $(4^2/')$-, $(4,2)$- и $(2/',2)$-средних, ибо фактор-группы $(4/',2)$ по четырем выписанным нормальным делителям ≊ $(2,1)$ [6]. Следовательно, всего таких групп будет 1×2+2×3+3×1+3×4=23 Q-средних. При всех бирозеточных P-симметриях класса изоморфизма 28) таких групп будет в 2 раза больше, именно 23×2=46 Q-средних.

Класс изоморфизма 29) исчерпывается одной $(4^4/',2)$-бирозеточной P-симметрией [2]. При этой P-симметрии группы G_1 порождают по 1 $(2,1)$- и $(1,2)$-средней, так как фактор-группы $(4^4/',2)$ по двум представленным нормальным делителям ≊ $(4/,1)$, по 2 4^4-, $(2,2)$- и 4^{-4}-средних, поскольку фактор-группы $(4^4/',2)$ по трём выписанным нормальным делителям ≊ $(2/,1)$, 3 $(2^2/')$-средних ввиду того, что $(4^4/',2)/(2^2/')$ ≊ $(2,2)$, по 3 $(4^4/')$-, $(4^{-4}/')$-, $(4^4,2)$- и $(2/',2)$-средних, ибо фактор-группы $(4^4/',2)$ по четырём перечисленным нормальным делителям ≊ $(2,1)$ [6]. Отсюда следует, что всего таких средних групп будет 1×2+2×3+3×1+3×4=23.

Класс изоморфизма 30), представленный группой $(4^4/)$, содержит две бирозеточные P-симметрии [2]. Группы G_1 с $(4^4/)$-симметрией порождают по 1 $(1,2)$- и 2^2-средней ввиду того, что фактор-группы $(4^4/)$ по отмеченным двум нормальным делителям ≊ $(4'/)$, по 1 (2/,1) и $(2/^2)$-средней, ибо фактор-группы $(4^4/)$ по выписанным двум нормальным делителям ≊ $(4,1)$, 3 $(2,2)$-средних, потому что $(4^4/)/(2,2)$ ≊ $(2,2)$, по 3 $(2/,2)$-, $(2/^4)$- и $(4^4,2)$-средних, так как фактор-группы по трем выписанным нормальным делителям ≊ $(2,1)$ [6]. Всего таких Q-средних групп будет 1×2+ 1×2+3×1+3×3=16. При двух бирозеточных P-симметриях класса изоморфизма 30), таких Q-средних групп будет в 2 раза больше, именно 2×16=32 группы.

Класс изоморфизма 31) представлен в [2] одной $(4'/^4)$-бирозеточной P-симметрией. Категория G_1 при группе $(4'/^4)$ порождает по 1 $(2,1)$- и $(1,2)$-средней, так как фактор-группа $(4'/^4)$ по выписанным нормальным делителям ≊ $(4'/)$, 3 $(2,2)$-средних, ибо $(4'/^4)/(2,2)$ ≊ $(2,2)$, 1 $(2^2/')$-среднюю, ввиду того, что $(4'/^4)/(2^2/')$ ≊ $(4,1)$, а также по 3 $(4,2)$-, $(2/^4)$- и $(2'/,2)$ вследствие того, что фактор-группы $(4'/^4)$ по трем перечисленным нормальным делителям ≊ $(2,1)$ [6]. Таким образом, категория G_1 при $(4'/^4)$-бирозеточной P-симметрии класса изоморфизма 31) порождает 1×2+3×1+1×1+3×3=15 Q-средних групп.

Класс изоморфизма 32), представленный группой $(4/^4)$, содержит 2 бирозеточные P-симметрии [2]; а группы G_1 с группой $(4/^4)$ порождают 1 $(1,2)$-среднюю, ибо $(4/^4)/(1,2)$ ≊ $(4/,1)$, по 1 $(4,1)$- и 4^2-средней, так как фактор-группы $(4/^4)$- по двум отмеченным нормальным делителям ≊ $(4,1)$, 2 $(2,2)$-средние ввиду того, что $(4/^4)/(2,2)$ ≊ $(2/,1)$, а также по 3 $(4,2)$- и $(2/^4)$-средних благодаря тому, что фактор-группы $(4/^4)$ по двум отмеченным нормальным делителям ≊ $(2,1)$ [6]. Отсюда следует, что категория G_1 при $(4/^4)$-симметрии порождает 1×1+1×2+2×1+3×2=11 Q-средних групп. При всех бирозеточных P-симметриях класса изоморфизма 32) таких Q-средних групп будет в 2 раза больше, именно 11×2=22.

Класс изоморфизма 33), представленный группой $(6,3)$, содержит 3 бирозеточных P-симметрии [2]. Рассматриваемые нами группы G_1 при $(6,3)$-симметрии порождают по 1 $(3,1)$-, $(1,3)$-, 3^3- и 3^{-3}-средней благодаря тому, что фактор-группы $(6,3)$ по четырем перечисленным нормальным делителям ≊ $(6,1)$, по 1 $(6,1)$- 6^3-, 6^{-3} и $(2,3)$-средней, так как фактор-группы $(6,3)$ по выписанным 4 нормальным делителям ≊ $(3,1)$, а также 3 $(3,3)$-средних, так как $(6,3)/(3,3)$ ≊ $(2,1)$ [6]. Таким образом, группы G_1 при

(6,3)-симметрии порождают 1×4+1×4+3×1=11 *Q*-средних групп. При всех бирозеточных *P*-симметриях класса изоморфизма 33) таких *Q*-средних групп будет в 3 раза больше, именно 11×3=33.

Класс изоморфизма 34), представленный группой *(3/,3)*, содержит 4 бирозеточных *P*-симметрии [2]. Группы G_1 с *(3/,3)*-симметрией порождают 1 *(3,1)*-среднюю ввиду того, что *(3/,3)/(3,1)* ≅ *(6,1)*, 1 *(1,3)*-среднюю, ибо *(3/,3)/(1,3)* ≅ *(3/,1)*, 1 *(3/,1)*, так как *(3/,3)/(3/,1)* ≅ *(3,1)* и *3 (3,3)*-средних вследствие того, что *(3/,3)/(3,3)* ≅ *(2,1)* [6]. Отсюда следует, что группы G_1 при *(3/,3)*-симметрии порождают 1×1+1×1+1×1+3×1=6 *Q*-средних групп. При всех бирозеточных *P*-симметриях класса изоморфизма 34) таких *Q*-средних групп категория G_1 будет порождать в 4 раза больше, именно 4×6=24.

При одной *(3/',3)*-бирозеточной *P*-симметрии класса изоморфизма 35) [2] группы G_1 порождают по 1 *(3,1)*-, *(1,3)*,- 3^3- и 3^{-3}-средней, так как фактор-группы *(3/',3)* по четырём выписанным нормальным делителям ≅ *(3/,1)*, по 1 *(3^3/')*- и *(3^{-3}/')*-средней, ибо фактор-группы *(3/',3)* по двум отмеченным нормальным делителям ≅ *(3,1)*, а также 3 *(3,3)*-средних, поскольку *(3/',3)/(3,3)* ≅ *(2,1)* [6]. Всего таких *Q*-средних групп будет 1×4+1×2+3×1=9.

Класс изоморфизма 36) содержит 2 бирозеточные *P*-симметрии [2]. При *(6,4)*-симметрии этого класса группы G_1 порождают по 1 *(1,4)*-, *(2,2)*- и 2^4-средней, ибо фактор-группы *(6,4)* по трем отмеченным нормальным делителям ≅ *(6,1)*, по 1 *(6,1)*-и 6^2-средней ввиду того, что фактор-группы по двум указанным нормальным делителям ≅ *(4,1),* 3 *(3,2)*-средних, так как *(6,4)/(3,2)* ≅ *(2,2)*, 1 *(2,4)*-среднюю, потому что *(6,4)/(2,4)* ≅ *(3,1)*, а также по 3 *(6,2)*-, 6^4- и *(3,4)*-средних благодаря тому, что фактор-группы *(6,4)* по трём выписанным нормальным делителям ≅ *(2,1)* [6]. Всего таких *Q*-средних групп будет 1×3+1×2+3×1+1×1+3×3=18. При всех бирозеточных *P*-симметриях класса изоморфизма 36) таких *Q*-средних групп будет в 2 раза больше, именно 18×2=36.

Класс изоморфизма 37), представленный группой *(6,2/)*, содержит 2 бирозеточные *P*-симметрии [2]. Группы G_1 при *(6,2/)*-симметрии порождают по 1*(1,2/)*-, *(2,2)*-,*(2,1/)*-, *(2^2,1/)*- и *(2',2)*-средней ввиду того, что фактор-группы *(6,2/)* по приведенным 5 нормальным делителям ≅ *(6,1)*, по 2 *(6,1)*-, 6^2- и 6'-средних, так как фактор-группа *(6,2/)* по трём отмеченным нормальным делителям ≅ *(2/,1)*, по 3 *(3,1/)*- и *(3,2)*-средних, поскольку фактор-группа *(6,2/)* по двум выписанным нормальным делителям ≅ *(2,2)*, 1 *(2,2/)*-среднюю, ибо *(6,2/)(2,2/)* ≅ *(3,1)*, по 3 *(6,2)*-, *(6,1/)*- и *(3,2/)*-средних вследствие того, что фактор-группы *(6,2/)* по перечисленным трём нормальным делителям ≅ *(2,1)* [6]. В результате получаем, что всего таких *Q*-средних групп будет 1×5+2×3+3×2+1×1+3×3=27. При всех бирозеточных *P*-симметриях класса изоморфизма 37) таких *Q*-средних групп будет в два раза больше, именно 27×2=54.

Далее, класс изоморфизма 38), представленный группой *(3/,2/)*, содержит 2 бирозеточные *P*-симметрии [2]. Группы G_1 при *(3/,2/)*-симметрии порождают 1 *(1,2/)*-среднюю группу, так как *(3/,2/)/(1,2/)* ≅ *(3/,1)*, по 3 *(3,2)*-,*(3,1/)* и *(3/')*-средних ввиду того, что фактор-группы *(3/,2/)* по отмеченным трём нормальным делителям ≅ *(2,2)*, по 2 *(3/,1)*- и *($3/^2$)*-средних, ибо фактор-группы *(3/,2/)* по указанным двум нормальным делителям ≅ (2/,1), а также по 3 *(3,2/)*-, *(3/,2)*- и *(3/,1/)*-средних, поскольку фактор-группы *(3/,2/)* по трём выписанным нормальным делителям ≅ *(2,1)* [6]. Следовательно, всего таких *Q*-средних групп будет 1×1+3×3+2×2+3×3=23. При всех бирозеточных *P*-симметриях класса изоморфизма 38) таких *Q*-средних групп будет в 2 раза больше, именно 23×2=46.

Класс изоморфизма 39), представленный группой *(6/,2)*, содержит 6 бирозеточных *P*-симметрий [2]. Группы G_1 при *(6/,2)*-симметрии порождают по 1 *(1,2)*- и 2^2-средней, так как фактор-группы *(6/,2)* по двум выписанным нормальным делителям ≅ *(6/,1)*, по 3 *(6,1)*-, *(3/,1)*- и *($3/^2$)*-средних, потому что фактор-группы *(6/,2)* по отмеченным трём нормальным делителям ≅ *(2,2)*, по 2 *(3,2)*- и 6^2-средних ввиду того, что фактор-группы *(6/,2)* по предъявленным нормальным делителям ≅ *(2/,1)*-, 1 *(2,2)*-среднюю, ибо *(6/,2)/(2,2)* ≅ *(3/,1)*, а также по 3 *(6/,1)*-, *($6/^2$)*-, *(6^2/)*-, (6,2)- и *(3/,2)*-средних вследствие того, что фактор-группы *(6/,2)* по пяти перечисленным нормальным делителям ≅ *(2,1)* [6]. Отсюда следует, что всех Q-средних групп будет 1×2+3×3+2×2+1×1+3×5=31. При всех бирозеточных P-симметриях класса изоморфизма 39) таких Q-средних групп будет в 6 раз больше, именно 31×6=186.

Класс изоморфизма 40), представленный группой *(6/',2)*, содержит 4 различных с учетом энантиоморфизма бирозеточных P-симметрии [2]. Группы G_1 при *(6/',2)*-симметрии порождают по 1 *(2,1)*-, *(1,2)*- и 2^2-средней ввиду того, что фактор-группы *(6/',2)* по трём отмеченным нормальным делителям ≊ *(6/,1)*, 1 *(2,2)*-среднюю, так как *(6/',2)/(2,2)* ≊ *(3/,1)*, по 2 *(6,1)*-, 6^2- и *(3,2)*-средних, ибо фактор-группы *(6/',2)* по трём выписанным нормальным делителям ≊ *(2/,1)*, 3 *(3/',1)*-средних вследствие того, что *(6/',2)/(3/',1)* ≊ *(2,2),* а также по 3 *(6,2)*-, *(6/')*-, *(6^2/')*- и *(3/',2)*-средних, потому что фактор-группы *(6/',2)* по четырём перечисленным нормальным делителям ≊ *(2,1)* [6]. Отсюда вытекает, что всех Q-средних групп, порождаемых категорией G_1, при рассматриваемой P-симметрии будет 1×3+1×1+ +2×3+3×1+3×4=25. При всех бирозеточных P-симметриях класса изоморфизма 40) таких Q-средних групп будет в 4 раза больше, именно 25×4=100.

Класс изоморфизма 41), представленный группой *(6^2/,1/)*, содержит 2 бирозеточные P-симметрии [2]. Обобщая группы G_1 с *(6^2/,1/)*-симметрией, получим 1 *(2^2,1/)*-среднюю, ибо *(6^2/,1/)/(2^2,1/)* ≊ *(3/,1)*, по 3 6^2-, $6^/$-, *(3,1/)*–, *(3/,1)*– и *($3^/2$)*-средних ввиду того, что фактор-группы *(6^2/,1/)* по отмеченным пяти нормальным делителям ≊*(2,2)*, по 3 *(6^2,1/)*-, *(6^2/)*-, *(6'/)*-, *($6'^/2$)*- и *(3/,1/)*-средних вследствие того, что фактор-группы *(6^2/,1/)* по выписанным пяти нормальным делителям ≊ *(2,1)*, а всего категория G_1 порождает 1×1+3×5+3×5=31 Q-среднюю группу. При всех бирозеточных P-симметриях класса изоморфизма 41) таких Q-средних групп будет в 2 раза больше, именно 31×2=62.

В свою очередь, класс изоморфизма 42), представленный группой *(6'/,2)*, содержит две бирозеточные P-симметрии [2]. Группы G_1 при *(6'/,2)*-симметрии порождают 1 *(2',2)*-среднюю, так как *(6'/,2)/ (2',2)* ≊ *(3/,1)*, по 3 *6'*- и *(3,2)*-средних ввиду того, что фактор-группы *(6'/,2)* по двум указанным нормальным делителям ≊ *(2,2)*, по 2 *(3/,1)*- и *(3/')*-средних, ибо фактор-группы *(6'/,2)* по двум выписанным нормальным делителям ≊ *(2/,1)*, а также по 3 *(6',2)*-, *(6'/)*-, *($6'^/2$)*-, *(3/,2)*- и *(3/',2)*-средних вследствие того, что фактор-группы *(6'/,2)* по перечисленным четырем нормальным делителям ≊ *(2,1)*. Следовательно, всего категория G_1 с *(6'/,2)*-симметрией порождает 1×1+3×2+2×2+3×5=26 Q-средних групп. При всех бирозеточных P-симметриях класса изоморфизма 42) таких Q-средних групп будет в 2 раза больше, именно 26×2=52.

Далее, класс изоморфизма 43), представленный группой *(4'/,3)*, содержит 4 бирозеточные P-симметрии [2]. Обобщая группы G_1 с *(4/,3)*-симметрией, получим 1 *(1,3)*-среднюю, так как *(4'/,3)/(1,3)* ≊ *(4/,1)*, 1 *(4,1)*-среднюю ввиду того, что *(4'/,3)/(4,1)* ≊ *(6,1)*, 2 *(2,3)*-средние, ибо *(4/,3)/(2,3)* ≊ *(2/,1)*, 1 *(4/,1)*-среднюю вследствие того, что *(4/,3)/(4,1)* ≊ *(3,1)*, а также по 3 *(2/,3)*- и *(4,3)*-средних группы, поскольку фактор-группы *(4/,3)* по двум отмеченным нормальным делителям ≊ *(2,1)* [6]. Отсюда следует, что всего Q-средних групп при обобщении категории G_1 с *(4/,3)*-симметрией будет 1×1+1×1+2× ×1+1×1+3×2=11. При всех бирозеточных P-симметриях класса изоморфизма 43) таких Q-средних групп будет в 4 раза больше, именно 11×4=44.

Класс изоморфизма 44), представленный группой *(4^2/,3)*, содержит 2 бирозеточные P-симметрии [2]. Группы G_1 при *(4^2/,3)*-симметрии порождают 1 *(1,3)*-среднюю, поскольку *(4^2/,3)/(1,3)* ≊ *(4'/)*, 1 4^2-среднюю, ибо *(4^2/,3)/4^2* ≊*(6,1),* 3 *(2,3)*-средних, так как *(4^2/,3)/(2,3)* ≊ *(2,2),* 1 *(4^2/)*-среднюю ввиду того, что *(4^2/,3)/(4^2/)* ≊ *(3,1)*, а также по 3 *(2/,3)*-, *($2^/2$,3)*- и *(4^2,3)*-средних группы из за того, что фактор-группы *(4^2/,3)* по отмеченным трём нормальным делителям ≊ *(2,1)*. Всего таких Q-средних групп будет 1×1+1×1+3×1+1×1+3×3=15 [6]. При всех бирозеточных P-симметриях класса изоморфизма 44) группы G_1 будут порождать Q-средних групп в 2 раза больше, а именно 15×2=30.

Класс изоморфизма 45), представленный группой *(6^4/)*, содержит 2 бирозеточные P-симметрии [2]. Обобщая группы G_1 с *(6^4/)*-симметрией, получим 1 2^4-среднюю, так как *(6^4/)/2^4* ≊ *(3/,1)*, 3 *(3,2)*-средних, ибо *(6^4//)/(3,2)* ≊ *(2,2)*, по 3 6^4-, *(3/,2)*- и *($3^/4$)*-средних группы, поскольку фактор-группы *(6^4/)* по трём выписанным нормальным делителям ≊ *(2,1)* [6]. Всего Q-средних групп имеем 1×1+3×1+3×3=13. При всех бирозеточных P-симметриях класса изоморфизма 45) из группы G_1 таких Q-средних групп будет выводиться в 2 раза больше, а именно 13×2=26.

Класс изоморфизма 46), представленный группой *(6/⁴),* содержит 2 бирозеточные P-симметрии [2]. Группы G_1 с $(6/^4)$-симметрией порождают 1 *(1,2)*-среднюю, ибо $(6/^4)/(1,2) \approx (6/,1)$, 1 *(2,2)*-среднюю, поскольку $(6/^4)/(2,2) \approx (3/,1)$, по 1 *(6,1)*- и 6^2-средней вследствие того, что фактор-группы $(6./^4)$ по двум указанным нормальным делителям $\approx (4,1)$, 2 *(3,2)*-средние, потому что $(6/^4)/(3,2) \approx (2/,1)$, по 3 *(6,2)*- и $(3/^4)$-средних группы ввиду того, что фактор-группы $(6/^4)$ по двум выписанным нормальным делителям $\approx$ *(2,1)* [6]. Всего Q-средних групп будет 1×1+1×1+1×1+2×1+3×2=11. При всех бирозеточных P-симметриях класса изоморфизма 46) таких Q-средних групп категория G_1 будет порождать в 2 раза больше, а именно 11×2=22.

Класс изоморфизма 47), представленный группой *(4'/,3)*, содержит 4 бирозеточные P-симметрии [2]. Категория G_1 при *(4'/,3)*-симметрии порождает 1 *(2,1)*-среднюю ввиду того, что $(4'/,3)/(2,1) \approx (6/,1)$, 1 *(1,3)*-среднюю, ибо $(4'/,3)/(1,3) \approx (4'/)$, 1 *(2/,1)*-среднюю, поскольку $(4'/,3)/(2/,1) \approx (3/,1)$, 3 (2,3)-средних, так как $(4'/,3)/(2,3) \approx (2,2)$, по 3 *(2/,3)*- и *(4',3)*-средних группы благодаря тому, что фактор-группы *(4'/,3)* по двум указанным нормальным делителям $\approx (2,1)$ [6]. Таким образом, группы G_1 при использованной P-симметрии порождают 1×1+1×1+1×1+3×1+3×2=12 Q-средних групп. При всех бирозеточных Р-симметриях класса изомрфизма 47) таких Q-средних групп будет в 4 раза больше, а именно 12×4=48.

Класс изоморфизма 48), представленный группой *(4/',3)*, содержит 4 P-симметрии [2]. Обобщая группы G_1 с *(4/',3)*-симметрией, получим 1 *(2,1)*-среднюю, так как $(4/',3)/(2,1) \approx (6/,1)$, 1 *(1,3)*-среднюю, поскольку $(4/',3)/(1,3) \approx (4/,1)$, 1 *(4,1)*-среднюю, ибо $(4/',3)/(4,1) \approx (3/,1)$, 2 *(2,3)*-средние ввиду того, что $(4/',3)/(2,3) \approx (2/,1)$, по 3 *(2/',3)*- и *(4,3)*-средних, благодаря тому, что фактор-группы *(4/',3)* по выписанным двум нормальным делителям $\approx (2,1)$. Всего имеем 1×1+1×1+1×1+2×1+3×2=11 Q-средних групп. При всех бирозеточных P-симметриях класса изоморфизма 48) категория G_1 порождает таких Q-средних групп в 4 раза больше, а именно 11×4=44.

В свою очередь, класс изоморфизма 49), представленный группой *(3/,4)*, содержит 2 бирозеточные P-симметрии [2]. При *(3/,4)*-симметрии группы G_1 порождают 1 *(1,4)*-среднюю, ибо $(3/,4)/(1,4) \approx (3/,1)$, 3 *(3,2)*-средних ввиду того, что $(3/,4)/(3,2) \approx (2,2)$, по 1 *(3/,1)*- и $(3/^2)$-средней, поскольку фактор-группы *(3/,4)* по двум отмеченным нормальным делителям $\approx (4,1)$, по 3 *(3,4)-*, *(3/,2)*- и $(3/^4)$-средних, так как фактор-группы *(3/,4)* по выписанным трём нормальным делителям $\approx (2,1)$ [6]. Отсюда следует, что всех Q-средних групп будет 1×1+3×1+1×2+3×3=15. При всех бирозеточных P-симметриях класса изоморфизма 49) таких Q-средних групп категория G_1 будет порождать в 2 раза больше, а именно 15×2=30.

Класс изоморфизма 50), представленный группой *(4/,4)*, содержит 2 бирозеточные P-симметрии [2]. При *(4/,4)*-симметрии группы G_1 порождают 1 *(1,4)*-среднюю, так как $(4/,4)/(1,4) \approx (4/,1)$, по 3 *(4,2)-*, *(2/,2)*- и $(2/^4)$-средних ввиду того, что фактор-группы *(4/,4)* по отмеченным трём нормальным делителям $\approx (2,2)$, 2 *(2,4)*-средние, поскольку $(4/,4)/(2,4) \approx (2/,1)$, по 1 *(4/,1)*- и $(4/^2)$-средней, ибо фактор-группы по двум выписанным нормальным делителям $\approx (4,1)$, а также по 3 *(4,4)-*, *(4/,2)-*, $(4/^4)$- и $(4^4/)$-средних группы вследствие того, что фактор-группы *(4/,4)* по приведенным четырём нормальным делителям $\approx (2,1)$ [6]. Следовательно, всех Q-средних групп будет 1×1+3×3+2×1+1×2+3×4=26. При всех бирозеточных P-симметриях класса изоморфизма 50) таких Q-средних групп категория G_1 будет порождать в 2 раза больше, а именно 26×2=52.

Класс изоморфизма 51), представленный группой *(4/,2/)*, содержит 2 бирозеточные P-симметрии [2]. При обобщении двух групп категории G_1 с *(4/,2/)*-симметрией получим по 1 *(1,2/)*-, $(2^2,1/)$- и *(2',2)*-средней вследствие того, что фактор-группы *(4/,2/)* по выписанным трём нормальным делителям $\approx (4/,1)$, по 3 *(4,2)-*, *(4,1/)-*, *(4')-*, $(4'^2)$-, *(2/,2)-*, *(2/,1/)-*, *(2/',2)*- и $(2/^2,1/)$-средних, так как фактор-группы

(4/,2/) по 8 перечисленным нормальным делителям $\cong$ *(2,2)*, по 2 *(2/,1)-*, $(4/^{2})$-, *(4/')-*, $(4^{2}/)$-, $(4^{2}/')$-, $(4^{2},1/)$-, *(4',2)-* и *(2,2/)*-средних, поскольку фактор-группы *(4/,2/)* по 8 выписанным нормальным делителям $\cong$ *(2/,1)*, по 3 *(4/,2)-, (4/,1/), (2/,2/)-, (4/',2)-*, $(4/^{2},1/)$-, *(4'/,2)-*, $(4^{2}/,1/)$ и *(4,2/)*-средних группы ввиду того, что фактор-группы *(4/,2/)* по приведенным 8 нормальным делителям $\cong$ *(2,1)* [6]. Отсюда следует, что всех таких *Q*-средних групп будет 1×3+3×8+2×8+3×8=67. При всех бирозеточных *P*-симметриях класса изоморфизма 51) категория G_1 будет порождать *Q*-средних групп в 2 раза больше, а именно 67×2=134.

Класс изоморфизма 52) представлен только одной группой $(4^{4}/,1/)$ [2], при обобщении с которой категория G_1 порождает по 3 *(2/,2)-, (2,2/)-*, $(2/^{4})$-, *(2/',2)*- и *(4',2)*-средних ввиду того, что фактор-группы $(4^{4}/,1/)$ по 5 выписанным нормальным делителям $\cong$ *(2,2),* по 3 $(4^{4\cdot}/)$, $(4^{4}/')$-, $(4'/^{4})$-, *(4'/,2)-*, $(2/^{4},1/)$- и *(2/,2/)*-средних группы, так как фактор-группы $(4^{4}/,1/)$ по 6 представленным нормальным делителям $\cong$ *(2,1)* [6]. Всего группы G_1 с одной $(4^{4}/,1/)$-бирозеточной *P*-симметрией класса изоморфизма 52) порождают 3×5+3×6=33 *Q*-средних группы.

Класс изоморфизма 53), представленный группой $(4/^{4},1/)$, содержит 2 бирозеточные *P*-симметрии [2]. Группы G_1 при $(4/^{4},1/)$-симметрии порождают по 1 *(4,1)*- и 4^{2}-средней ввиду того, что фактор-группы $(4/^{4}, 1/)$ по двум выписанным нормальным делителям $\cong$ *(4'/)*, по 1 *(1,2/)* и *(2',2)*-средней, так как фактор-группы $(4/^{4},1/)$ по двум отмеченным нормальным делителям $\cong$ *(4/,1)*, по 2 *(2,2/)*- и *(4',2)*-средних, поскольку фактор-группы $(4/^{4},1/)$ по двум приведенным нормальным делителям $\cong$ *(2/,1)*, по 3 $(2/^{4})$- и *(2/',2)*-средних, ибо фактор-группы $(4/^{4},1/)$ по указанным двум нормальным делителям $\cong$*(2,2)*, по 3 $(4/^{4})$-, *(4,2/)- , (4/',2)- и* $(2/^{4},1/)$-средних благодаря тому, что фактор-группы $(4/^{4},1/)$ по четырём перечисленным нормальным делителям $\cong$ *(2,1)* [6]. Следовательно, всего *Q*-средних групп насчитывается 1×2+1×2+2×2+3×2+3×4=26. При всех бирозеточных *P*-симметриях класса изоморфизма 53) таких *Q*-средних групп категория G_1 будет порождать в 2 раза больше, а именно 26×2=52.

Далее, при $(4/^{'},4)$-бирозеточной *P*-симметрии, которой представлен класс изоморфизма 54) [6], группы категории G_1 порождают по 1 *(4,1)-*, 4^{2}-, 4^{4}-, 4^{-4}-, *(1,4)*- и 2^{4}- средней, поскольку фактор-группы *(4/',4)* по 6 представленным делителям $\cong$ *(4/,1)*, по 2 *(4,2)-, (2,4)*- и $(4^{4},2)$- средних оттого, что фактор-группы *(4/',4)* по трём выписанным нормальным делителям $\cong$ *(2/,1)*, 3 *(2/',2)*- средних ввиду того, что *(4/',4)/(2/',2)* $\cong$ *(2,2),* по 3 *(4/',2)-, (2/',4)*- и *(4,4)*- средних, так как фактор-группы *(4/',4)* по 3 выписанным нормальным делителям $\cong$ *(2,1)* [6]. Всего, группы симметрии категории G_1 с одной *(4/',4)*-бирозеточной *P*-симметрией класса изоморфизма 54) порождают 1×6+2×3+3×1+3×3=24 *Q*-средних групп.

Аналогично, при *(6,6)*- бирозеточной *P*-симметрии, которой представлен весь класс изоморфизма 55) [2], группы G_1 порождают по 1 *(6,1)-, (1,6)-*, 6^{3}-, 6^{-3}-, *(3,2)-, (2,3)-*, 6^{2}-,$(2^{2},3)$-, $(3^{3},2)$-, $(3^{-3},2)$~, 6^{6} и (6^{-6})-средней, так фактор-группы *(6,6)* по 12 выписанным нормальным делителям $\cong$ *(6,1)*, 3 *(3,3)*-средних ввиду того, что *(6,6)/(3,3)* $\cong$ *(2,2)*, по 1 *(6,2)-, (2,6)-*, $(6^{3},2)$- и $(6^{-3},2)$- средней, поскольку фактор-группы *(6,6)* по 4 представленным нормальным делителям $\cong$ *(3,1)*, по 3 *(6,3)-, (3,6)*- и $(6^{2},3)$-средних группы, ибо фактор-группы *(6,6)* по трём отмеченным нормальным делителям $\cong$ *(2,1)* [6]. Таким образом, группы G_1 с одной *(6,6)* бирозеточной *P*-симметрией класса изоморфизма 55) порождают 1×12+3×1+1×4+3×3=28 *Q*-средних групп.

С единственной *(3/,3/)*-бирозеточной *P*-симметрией, которой представлен класс изоморфизма 56) [2], две группы симметрии, *p1* и *pm*, категории G_1 порождают по 1 *(3/,1)*- и *(1,3/)*-средней, поскольку фактор-группы *(3/,3/)* по двум отмеченным нормальным делителям $\cong$ *(3/,1)*, 3 *(3,3)*-средних, так как *(3/,3/)/(3,3)* $\cong$ *(2,2)*, по 3 *(3/,3)*- и *(3,3/)*-средних группы, так как что фактор-группы *(3/,3/)* по двум приведенным нормальным делителям $\cong$ *(2,1)* [6]. Всего группы G_1 при бирозеточной *(3/,3/)*-симметрии класса изоморфизма 56) порождают 1×2+3×1+3×2=11 *Q*-средних групп.

При *(6,3/)*-симметрии, которой представлен класс изоморфизма 57), содержащий 4 бирозеточных *P*-симметрии [2], группы G_1 порождают 1 *(6,1)*-среднюю, так как *(6,3/)/6,1)* $\cong$ *(3/,1)* по 1 *(1,3/)*- и *(2,3)*-

средней ввиду того, что фактор-группы *(6,3/)* по двум выписанным нормальным делителям ≅ *(6,1),* 3 *(3,3)*-средних, ибо *(6,3/)/(3,3)* ≅ *(2,2),* 1 *(2,3)*-среднюю, поскольку *(6,3/)/(2,3/)* ≅ *(3,1),* по 3 *(6,3)*- и *(3,3/)*-средних, ибо фактор-группы *(6,3/)* по двум отмеченным нормальным делителям ≅ *(2,1)* [6]. Всего таких *Q*-средних групп 1×1+1×2+3×1+1×1+3×2=13. При всех бирозеточных *P*-симметриях класса изоморфизма 57) новых *Q*-средних групп будет в 4 раза больше, а именно 13×4=52.

В свою очередь, при *(6/,3)*-симметрии, которой представлен класс изоморфизма 58), содержащий 4 бирозеточных *P*-симметрии [2], группы G_1 порождают 1 *(1,3)*-среднюю ввиду того, что *(6/,3)/(1,3)* ≅ *(6/,1)*, по 1 *(6,1)*- и *(3/,1)*-средней, ибо фактор-группы *(6/,3)* по двум приведенным нормальным делителям ≅ *(6,1)*, 1 *(2,3)*-среднюю, так как *(6/,3)/(2,3)* ≅ *(3/,1),* 2 *(3,3)*-средние, поскольку *(6/,3)/(2,3)* ≅ *(2/,1)*, 1 *(6/,1)*-среднюю, потому что *(6/,3)/(6/,1)* ≅ *(3,1)*, а также 3 *(6,3)*-средних группы, в связи с чем *(6/,3)/(6,3)* ≅ *(2,1)* [6]. Всего группы G_1 порождают 1×1+1×2+1×1+2×1+1×1+3×1=10 *Q*-средних групп. При всех бирозеточных *P*-симметриях класса изоморфизма 58) таких *Q*-средних групп будет в 4 раза больше, именно 10×4=40.

При *(6/',3)*-симметрии, которой представлен класс изоморфизма 59), содержащий 3 бирозеточных *P*-симметрии [2], группы G_1 порождают по 1 *(3,1)*- *(1,3)*-, 3^3- и 3^{-3} средней, так как фактор-группы *(6/',3)* по четырём выписанным нормальным делителям ≅ *(6/,1)*, по 1 *(6,1)*-, *(2,3)*-, 6^3- и 6^{-3}- средней ввиду того, что фактор-группы *(6/',3)* по четырём отмеченным нормальным делителям ≅ *(3/,1)*, 2 *(3,3)*-средние, поскольку *(6/',3)/(3,3)* ≅ *(2/,1)*, по 3 *(6,3)*- и *(3/',3)*-средних группы, ибо фактор-группы *(6/',3)* по предъявленным двум нормальным делителям ≅ *(2,1)* [6]. Следовательно, взятые нами группы G_1 при *(6/',3)*- симметрии порождают 1×4+1×4+2×1+3×2=16 *Q*-средних групп. При всех бирозеточных *P*-симметриях класса изоморфизиа 59) таких *Q*-средних групп будет в 3 раза больше, именно 16×3=48.

При *(6'/,3)*- симметрии, которой представлен класс изоморфизма 60), содержащий 3 бирозеточных *P*-симметрии [2], группы G_1 порождают по 1 *(3/,1)*- и *(2'/,3)*-средней, так как фактор-группы *(6'/,3)* по двум отмеченным нормальным делителям ≅ *(3/,1)*, 3 *(3,3)*-средних ввиду того, что *(6'/,3)/3,3)* ≅ *(2,2),* по 3 *(6',3)*- и *(3/,3),* поскольку фактор-группы *(6'/,3)* по двум указанным нормальным делителям ≅ *(2,1)* [6]. Отсюда следует, что группы G_1 при *(6'/,3)*-симметрии порождают 1×2+3×1+3×2=11 *Q*-средних групп. При всех бирозеточных *P*-симметриях группы G_1 будут порождать таких *Q*-средних групп в 3 раза больше, а именно 11×3=33.

При *(6,4/)*-симметрии, которой представлен класс изоморфизма 61), содержащий 2 бирозеточных *P*-симметрии [2], группы G_1 порождают по 1 *(6,1)*-, *(3,2)*- и 6^2- средней, ибо фактор-группы *(6,4/)* по трём отмеченным нормальным делителям ≅ *(4/,1)*, по 2 *(6,2)*-, *(6',2)*- и 6^4-средних, поскольку фактор-группы *(6,4/)* по одному представленному нормальному делителю ≅ *(2/,1)*, 1 *(2,4/)*-среднюю ввиду того, что фактор-группы *(6,4/)* по двум приведенным нормальным делителям ≅ *(3,1)*, по 3 *(6,2/)*-, *(6,4)*-, *(6',4)*-, *(6^4,1/)*- и *(3,4/)*-средних, потому что фактор группы *(6,4/)* по пяти перечисленным нормальным делителям ≅ *(2,1)* [6], по 3 *(3,4)*- и *(3,2/)* средних, так как фактор-группа *(6,4')* по двум указанным н10 *Q*-средних гр≅пп. При всех бирозеточных *P*-симметриях класса изоморфизма *61)* таких *Q*-средних групп будет в 2 раза больше, именно 30×2=60.

При *(4/,3/)*-симметрии, которой представлен класс изоморфизма *62)*, состоящий из двух бирозеточных *P*-симметрий [2], группы G_1 порождают по 1 *(1,3/)*- и *(2',3)*-средней ввиду того, что фактор-группы *(4/,3/)* по двум выписанным нормальным делителям ≅ *(4/,1)*, по 1 *(4/, 1)*-средней, поскольку *(4/,3/)/(4/,1)* ≅ *(3/,1),* по 3 *(4,3)*-, *(2/,3)*-, *(2/',3)*- и *(2'/,3)*-средних вследствие того, что фактор-группа *(4/,3/)* по четырём перечисленным нормальным делителям ≅ *(2,2)*, по 2 *(2,3/)*- и *(4',3)*-средних, поскольку фактор-группы *(4/,3/)* по двум указанным нормальным делителям ≅ *(2/,1),* по 3 *(4,3/)*-, *(2/,3/)*-, *(4/,3)*-, *(4/',3)*- и *(4'/,3)*-средних, так как фактор-группы *(4/,3/)* по пяти отмеченным нормальным делителям $\approxeq$ $(2,1)$ [6]. Следовательно, категория G_1 при $(4/,3/)$-симметрии порождает 1×2+1×1+3×4+2×2+ +3×5=34 Q-средние группы. При всех бирозеточных P-симметриях класса изоморфизма 62) категория G_1 будет порождать таких Q-средних групп в 2 раза больше, а именно 34×2=68.

При $(6/,4)$-симметрии, которой представлен класс изоморфизма 63), содержащий две бирозеточные P-симметрии [2], группы категории G_1 порождают по 1 $(1,4)$- и 2^{4}-средней ввиду того, что фактор-группы $(6/,4)$ по двум выписанным нормальным делителям $\approxeq$ $(6/,1)$, по 1 $(6/,1)$-, $(6/^{2})$- и $(6^{2}/)$-средней, так как фактор-группы $(6/,4)$ по трём отмеченным нормальным делителям $\approxeq$ $(4,1)$, по 3 $(3/,2)$-, $(3/^{4})$- и $(6,2)$-средних, ибо фактор-группы $(6/,4)$ по трём представленным нормальным делителям $\approxeq$ $(2,2)$, по 2 $(3,4)$- и 6^{4}-средних, поскольку фактор-группы $(6/,4)$ по двум отмеченным нормальным делителям $\approxeq$ $(2/,1)$, 1 $(2,4)$-среднюю благодаря тому, что $(6/,4)/(2,4)$ $\approxeq$ $(3/,1)$, по 3 $(6/,2)$-, $(3/,4)$-, $(6/^{4})$- и $(6^{4}/)$-средних группы вследствие того, что фактор-группы $(6/,4)$ по четырём перечисленным нормальным делителям $\approxeq$ $(2,1)$ [6]. Отсюда следует, что группы G_1 при их обобщении с $(6/,4)$-симметрией порождают 1×2+1×3+3×3+2×2+1×1+3×4=31 Q-среднюю группу. При всех бирозеточных P-симметриях класса изоморфизма 63) таких Q-средних групп G_1 будет порождать в 2 раза больше, а именно 31×2=62.

При $(6/,2/)$-симметрии, которой представлен класс изоморфизма 64), содержащий 2 бирозеточные P-симметрии [2], группы G_1 порождают по *1* $(1,2/)$-, $(2^{2},1/)$-, $(2',2)$-средней, так как фактор-группы $(6/,2/)$ по трём выписанным нормальным делителям $\approxeq$ $(6/,1)$, *1* $(2,2/)$-среднюю, ибо $(6/,2/)/(2,2/)$ $\approxeq$ $(3/,1)$, по *2* $(6/,1)$-, $(6/^{2})$-, $(6/')$-, $(6^{2}/)$-, $(6'/)$-, $(6^{2}/')$-, $(6'/^{2})$- и $(3,2/)$-средних, поскольку фактор-группы $(6/,2/)$ по восьми перечисленным нормальным делителям $\approxeq$ $(2/,1)$, по *3* $(3/,2)$-, $(3/,1/)$-, $(3/^{2},1/)$-, $(3/',2)$-, $(6^{2},1/)$-, $(6',2)$-, $(6,2)$- и $(6,1/)$-средних ввиду того, что фактор-группы $(6/,2/)$ по восьми представленным нормальным делителям $\approxeq$ $(2,2)$, по *3* $(6/,2)$-, $(6/,1/)$-, $(6,2/)$-, $(3/,2/)$-, $(6/',2)$-, $(6'/^{2},1/)$-, $(6'/,2)$- и $(6^{2}/,1/)$-средних группы, потому что фактор-группы $(6/,2/)$ по восьми указанным нормальным делителям $\approxeq$ $(2,1)$ [6]. Таким образом, всего группы G_1 с $(6/,2/)$-симметрией порождают 1×3+1×1+2×8+3×8+3×8 = 68 Q-средних групп. При всех бирозеточных P-симметриях класса изоморфизма 64) таких Q-средних групп категория G_1 будет порождать в 2 раза больше, а именно 68×2=136.

При $(6/^{4},1/)$-симметрии, которой представлен класс изоморфизма 65), состоящий из 2 бирозеточных P-симметрий [2], группы G_1 порождают по 1 $(1,2/)$- и $(2/,2)$-средней, так как фактор-группы $(6/^{4},1/)$ по двум указанным нормальным делителям $\approxeq$ $(6/,1)$, по 1 $(6,1)$- и 6^{2}-средней ввиду того, что фактор-группы $(6/^{4},1/)$ по двум выписанным нормальным делителям $\approxeq$ $(4'/)$, 1 $(2,2/)$-среднюю, ибо $(6/^{4},1/)/(2,2/)$ $\approxeq$ $(3/,1)$, по 2 $(6/,2)$- и $(3,2/)$-средних, поскольку фактор-группы $(6/^{4},1/)$ по двум отмеченным нормальным делителям $\approxeq$ $(2/,1)$ по 3 $(3/^{4})$- и (3/',2)-средних, потому что фактор-группы $(6/^{4},1/)$ по двум представленным нормальным делителям $\approxeq$ $(2,2)$, по 3 $(6/^{4})$-, $(6,2/)$-, $(3/^{4},2)$- и $(6/',2)$-средних вследствие того, что фактор-группы по четырём представленным нормальным делителям $\approxeq$ $(2,1)$ [6]. Отсюда следует, что группы G_1 с $(6/^{4},1/)$-симметрией порождают 1×2+1×2+1×1+2×2+3×2+3×4=27 Q-средних групп. При всех бирозеточных P-симметриях класса изоморфизма 65) таких Q-средних групп категория G_1 будет порождать в 2 раза больше, а именно 27×2=54.

При $(6^{4}/,1/)$-симметрии, которой представлен класс изоморфизма 66), состоящий из 2 бирозеточных P-симметрий [2], группы симметрии G_1 порождают по 1$(3/,1)$- и $(3/^{2})$-средней, ибо фактор-группы $(6^{4}/,1/)$ по двум указанным нормальным делителям $\approxeq$ $(4'/)$, по 3 (6^{4})-, $(3,2/)$-, $(3/,2)$-, $(3/',2)$-, $(6',2)$- и $(3/^{4})$-средних ввиду того, что фактор-группы $(6^{4}/,1/)$ по шести выписанным нормальным делителям $\approxeq$ $(2,2)$, по 3 $(6^{4}/)$-, $(6^{4}1/)$-, $(6^{4}/')$-, $(6'/^{4})$-, $(6'/,2)$-, $(3/^{4},1/)$- и $(3/,2/)$-средних, так как фактор-группы $(6^{4}/,1/)$ по всем выписанным нормальным делителям $\approxeq$ $(2,1)$. Таким образом, при обобщении групп категории G_1 с $(6^{4}/,1/)$-симметрией выводится 1×2+3×6+3×7=41 Q-средняя группа. При всех бирозеточных P-симметриях класса изоморфизма 66) таких Q-средних групп категория G_1 будет порождать в 2 раза больше, а именно 41×2=82.

При $(6'/,4)$-симметрии, которой представлен класс изоморфизма 67), содержащий 2 бирозеточных P-симметрии [2], группы G_1 порождают по 1 $(3/,1)$- и $(3/^{2})$-средней, поскольку фактор-группы $(6'/,4)$

по двум указанным нормальным делителям ≅ *(4/,1)*, 1 *(2',4)*-среднюю ввиду того, что *(6'/,4)/(2',4)* ≅ *(3/,1)*, по 3 *(3,4)*- и *(6',2)*-средних благодаря тому, что фактор-группы *(6'/,4)* по двум отмеченным нормальным делителям ≅ *(2,2),* по 2 *(3/*^{4}*)-, (3/,2)*- и *(3/',2)*-средних, ибо фактор-группы *(6'/,4)* по трём указанным нормальным делителям ≅ *(2/,1),* по 3 *(6'/,2)-, (3/,4)-, (3/',4)-, (6',4)*- и *(6'/*^{4}*)*-средних групп, так как фактор-группы *(6'/,4)* по пяти выписанным нормальным делителям ≅ *(2,1)* [6]. Отсюда вытекает, что группы G_1 при взятой *(6'/,4)*-симметрии порождают 1×2+1×1+3×2+2×3+3×5=30 *Q*-средних групп. При всех бирозеточных *P*-симметриях класса изоморфизма 67) таких *Q*-средних групп категория G_1 будет порождать в 2 раза больше, а именно 30×2=60.

При *(6/',4)*- симметрии, которой представлен класс изоморфизма 68), содержащий 2 бирозеточных *P*-симметрии, группы симметрии G_1 порождают по 1 *(1,4)*- и *(2,2)*-средней так как фактор-группа *(6/',4)* по двум указанным нормальным делителям ≅ *(6/,1)*, по 1 *(6,1)*- и 6^2-средней ввиду того, что фактор-группы *(6/',4)* по двум выписанным нормальным делителям ≅ *(4/,1),* 1 *(2,4)*- среднюю, ибо *(6/',4)/(2,4)* ≅ *(3/,1)*, по 2 *(3,4)-, (6,2)*- и 6^4-средних благодаря тому, что фактор-группы *(6/',4)* по трём перечисленным нормальным делителям ≅ *(2/,1),* 3 *(3/',2)*-средних, потому что *(6/',4)/(3/',2)* ≅ *(2,2),* по 3 *(6,4)-, (6/',2)-, (3/',4)*- и *(6*^{4}*/')*-средних вследствие того, что фактор-группы *(6/',4)* по четырём указанным нормальным делителям ≅ *(2,1)*[6]. Следовательно, при рассматриваемой *(6/',4)*-симметрии две группы G_1 порождают 1×2+1×2+1×1+2×3+3×1+3×4=26 *Q*-средних групп. При всех бирозеточных *P*-симметриях класса изоморфизма 68) таких *Q*-средних групп G_1 будет порождать в 2 раза больше, а именно 26×2=52.

При *(4/,4/)*-бирозеточной *P*-симметрии, которой представлен весь класс изоморфизма 69) [2], группы G_1 порождают по 1 *(4/,1)-, (1,4/)-, (4/*^{2}*)- (2',4)-, (4*^{2}*/)*- и *(2*^{4}*,1/)*-средней ввиду того, что фактор-группы *(4/,4/)* по выписанным шести нормальным делителям ≅ *(4/,1)*, по 2 *(4/,2)-, (2,4/)-, (4*^{4}*/',2)- (4/*^{4}*)*- и *(4',4)*-средних, так как фактор-группы *(4/,4/)* по пяти отмеченным нормальным делителям ≅ *(2/,1)*, по 3 *(4,2/)-, (2/,4)-, (2/,2/)-, (4,4)-, (2/',4)-, (4/',2)-, (2/*^{4}*,1/)*- и *(4'/,2)*-средних вседствие того, что фактор-группы *(4/,4/)* по восьми перечисленным нормальным делителям ≅ *(2,2),* по 3 *(4/,4)-, (4, 4/)-, (4/',2/)-, (2/,4/)-, (4/',4)-, (4'/,4)*- и *(4/*^{4}*1/)*-средних группы, поскольку фактор-группы *(4/,4/)* по заявленным семи нормальным делителям ≅ *(2,1)* [6]. Таким образом, группы G_1 при их обобщении с одной *(4/,4/)*-бирозеточной *P*-симметрией, составляющей класс изоморфизма 69), порождают 1×6+2×5+3×8+ +3×7=61 *Q*-среднюю группу.

При *(6/,6)*-симметрии, которой представлен класс изоморфизма 70), содержащий 2 бирозеточные *P*-симметрии [2], группы симметрии G_1 порождают по 1 *(1,6)-,* 6^2- и *(2*^{2}*,3)*- средней вследствие того, что фактор-группы *(6/,6)* по трём отмеченным нормальным делителям ≅ *(6/,1)*, по 1 *(6/,1)- (6/*^{2}*)-, (6,2)-, (6*^{2}*/)*- и *(3/,2)*-средней ввиду того, что фактор-группы *(6/,6)* по пяти приведенным нормальным делителям ≅ *(6,1)*, 1 *(2,6)*-среднюю, так как *(6',6)/(2,6)* ≅ *(3/,1),* 3 *(3/,3)*-средних ввиду того, что *(6/,6)/(3/,3)* ≅ *(2,2),* 2 *(3,6)*-средние, ибо *(6/,6)/(3,6)* ≅ *(2/,1),* 1 *(6/,2)*-среднюю благодаря тому, что *(6/,6)/(6/,2)* ≅ *(3,1),* по 3 *(3/,6)-, (6/,3)-, (6/*^{2}*,3)*- и *(6*^{2}*/,3)*-средних вследствие того, что фактор-группы *(6/,6)* по четырём указанным нормальным делителям ≅ *(2,1)* [6]. Таким образом, группы G_1 при *(6/,6)*-симметрии порождают 1×3+1×5+1×1+3×2+2×1+1×1+3×4=30 *Q*-средних групп. При всех бирозеточных *P*-симметриях класса изоморфизма 70) таких *Q*-средних групп категория G_1 будет порождать в 2 раза больше, а именно 30×2=60.

В свою очередь, при *(6/,3/)*-симметрии, которой представлен класс изоморфизма 71), содержащий 4 бирозеточные *P*-симметрии [6], группы симметрии категории G_1 порождают по 1 *(1,3/)*- и *(2',3)*-средней, поскольку фактор-группы *(6/,3/)* по двум отмеченным нормальным делителям ≅ *(6/,1),* по 1 *(2,3/)*- и *(6/,1)*-средней, так как фактор-группы *(6/,3/)* по двум выписанным нормальным делителям ≅ *(3/,1),* по 2 *(3,3/)*- и *(6',3)*-средних вследствие того, что фактор-группы *(6/,3/)* по двум указанным нормальным делителям ≅ *(2/,1),* по 3 *(6,3)-, (3/,3)*- и *(3/',3)*-средних благодаря тому, что фактор-группы *(6/,3/)* по трём приведенным нормальным делителям ≅ *(2,2),* по 3 *(6,3/)-, (3/,3/)-, (6/,3)-, (6/',3)*- и *(6'/,3)*-средних группы вследствие того, что фактор-группы *(6/,3/)* по пяти перечисленным нормальным делителям ≅ *(2,1)* [6]. Отсюда непосредственно следует, что группы G_1 при их обобщении с *(6/,3/)* бирозеточной *P*-симметрией порождают 1×2+1×2+2×2+3×3+3×5=32 *Q*-средних группы. При всех биротечных *P*-симметриях класса изоморфизма 71) таких *Q*-средних групп категория G_1 будет порождать в 4 раза больше, а именно 32×4=128.

При *(6^2/,3/)*-симметрии, которой исчерпывается весь 72) класс изоморфизма бирозеточных *P*-симметрий [2], группы G_1 порождают по 1 *(6^2/)*- и *(2^2,3/)*-средней благодаря тому, что фактор-группы *(6^2/,3/)* по двум указанным нормальным делителям ≅ *(3/,1)*, по 3 *(3,3/)-, (6^2,3)-, (3/,3)-, (3/',3)-* и *($3/^{2'}$,3)*-средних, так как фактор-группы по пяти выписанным нормальным делителям ≅ *(2,2),* по 2 *(6',3)-, ($3/^2$,3)*-средних вследствие того, что фактор-группы *(6^2/,3/)* по двум заявленным нормальным делителям ≅ *(2/,1),* по 3 *(6^2, 3/)-, (6^2/,3)-, (6^2/',3)-, (6'/,3)-, (3/,3/)-* и *($3/^2$,3/)*-средних, поскольку фактор-группы *(6^2/,3/)* по шести перечисленным нормальным делителям ≅ *(2,1)* [6]. Таким образом, группы G_1 с классом изоморфизма 72), содержащего 1 *(6^2/,3/)*-бирозеточную *P*-симметрию, порождают 1×2+3×5+2×2+3×6=39 *Q*-средних групп.

Далее, при *(6/',6)*-бирозеточной *P*-симметрии, характеризующей полностью класс изоморфизма 73), группы G_1 порождают по 1 *(6,1)-, (1,6)-, (3,2)-, (2,3)-, 6^2-,(2^2,3)-, 6^3-, 6^{-3}-, 6^6-* и *6^{-6}*-средней, так как фактор-группы *(6/',6)* по выписанным десяти нормальным делителям ≅ *(6/,1),* по 1 *(6,2)-, (2,6)-, (6^3,2)-* и *(6^{-3},2)*-средней ввиду того, что фактор-группы *(6/',6)* по отмеченным четырём нормальным делителям ≅ *(3/,1)*, по 3 *(6,3)-, (3,6)-* и *(3/',3)*-средних вследствие того, что фактор-группы *(6/',6)* по трём указанным нормальным делителям ≅*(2,2),* 2 *(6^2,3)*-средние, поскольку *(6/',6)/(6^2,3)* ≅ *(2/,1),* по 3 *(6,6)-, (6/',3)-* и *(3/',6)*-средних, потому что фактор-группы *(6/',6)* по трём заявленным нормальным делителям ≅ *(2,1)* [6]. Следовательно, группы G_1 при бирозеточной *(6/',6)*- симметрии класса изоморфизма 73) порождают 1×10+1×4+3×3+2×1+3×3=34 *Q*-средних группы.

При *(6/,4/)*- симметрии, которой представлен класс изоморфизма 74), содержащий 2 бирозеточные *P*-симметрии [2], группы симметрии категории G_1 порождают по 1 *(1,4/)-, (2',4)- и (2^4,1/)*-средней, поскольку фактор-группы *(6/,4/)* по трём отмеченным нормальным делителям ≅ *(6/,1)*, по 1 *(6/,1)-, ($6/^2$)-* и *(6^2/)*-средней ввиду того, что фактор-группы *(6/,4/)* по трём выписанным нормальным делителям ≅*(4/,1)*, по 2 *(6/,2)-, (3,4/)-, (6/',2)- , (6^4/')-, (6',4)-, ($6/^4$)-* и *(6'/,2)*-средних благодаря тому, что фактор-группы *(6/,4/)* по семи отмеченным нормальным делителям ≅ *(2/,1),* по 3 *(3/,4)-, (3/,2/)-, (3/',4)-, ($3/^4$,1/)-, (6,4)-* и *(6,2/)*-средних вследствие того, что фактор-группы *(6/,4/)* по шести перечисленным нормальным делителям ≅ *(2,2)*, по 3 *(6/,4)-, (6/,2/)-, (6,4/)-, (3/,4/)-, (6/',4)-, (6'/,4)-, ($6/^4$,1/)-* и *(6^4/,1/)*-средних группы, ибо фактор-группы *(6/,4/)* по 8 указанным нормальным делителям ≅ *(2,1)* [6]. Таким образом, группы G_1 при обобщении с *(6/,4/)*- симметрией порождают 1×3+1×3+2×7+3×6+3×8=62 *Q*-средние группы. При всех бирозеточных *P*-симметриях класса изоморфизма 74) таких *Q*-средних групп G_1 будет порождать в 2 раза больше, а именно 62×2=124.

Наконец, при *(6/,6/)*- симметрии, которой исчерпывается весь класс изоморфизма 75) бирозеточных *P*-симметрий [2], группы *p1* и *pm* категории G_1 порождают по 1 *(6/,1)-, (1,6/)-, ($6/^2$)-, (2',6)-, (6^2/)-* и *(2^2,3/)*-средней благодаря тому, что фактор-группы (6/,6/) по выписанным шести нормальным делителям ≅ *(6/,1)*, по 1 *(6/,2)* и *(2,6/)*-средней, ибо фактор-группы *(6/,6/)* по двум отмеченным нормальным делителям ≅ *(3/,1),* по 2 *(6/,3)-, (3,6/)-, (6^2/,3)-, (6^2,3/)-, (6'/,3)-, ($3/^2$,3/)-, ($6'/^2$,3)-* и *(6^2/',3)*-средних, так как фактор-группы *(6/,6/)* по восьми указанным нормальным делителям ≅ *(2/,1),* по 3 *(3/,3/)-, (6, 6)-, (6,3/)-, (3/,6)-, (6/',3)-* и *(3/', 6)*-средних вследствие того, что фактор-группы *(6/,6/)* по шести перечисленным нормальным делителям ≅ *(2,2),* по 3 *(6/,6)-, (6,6/)-, (6/,3/)-, (3/,6/)-, (6/',6)-, (6'/,6)- , ($6/^2$,3/)-* и *(6^2/,3/)*-средних, потому что фактор-группы *(6/,6/)* по заявленным восьми нормальным делителям ≅ *(2,1)* [6]. Следовательно, группы G_1 при обобщении с единственной бирозеточной *P*-симметрией класса изоморфизма 75) порождают 1×6+1×2+2×8+3×6+3×8=66 *Q*-средних групп.

Итак, для всех неизоморфных между собой 75 классов изоморфизма, по которым распределяются 263 бирозеточных *P*-симметрии при $P \sqcup G_{420}$, приведены числовые результаты вывода младших и подсчёта *Q*-средних одномерных линейных групп G_1^P, порождаемых двумя группами симметрии *p1* и *pm* категории G_1 при их обобщении с *P*-симметриями каждого из отмеченных классов изоморфизма бирозеточных *P*-симметрий.

4. Тщательное суммирование полученных числовых результатов по выводу старших, младших и подсчёту *Q*-средних одномерных линейных групп G_1^P бирозеточных *P*-симметрий при $P \sqcup G_{420}$, собранных в п.3 настоящей работы, приводит нас к числу 5185 групп, из которых 2 порождающих, 524 старших, 139 младших и 4520 *Q*-средних. Выявленными группами G_1^P 263 бирозеточных *P*-симметрий интерпретируются с точностью до строения, как это следует из [2], все различные группы симметрии пятимерного эвклидова пространства, сохраняющих в нём трёхмерную плоскость и лежащую в ней прямую, то есть пятимерные группы симметрии категории G_{531}.

В то же время эти же пятимерные группы симметрии категории G_{531} моделируются с точностью до строения, как это продемонстрировано в [1], 5185 стержневыми группами G_{31}^P 10 розеточных *P*-симметрий при $P \sqcup G_{20}$. Количественное совпадение двух независимых методов подсчёта пятимерных групп симметрии категории G_{531} говорит о верности осуществлённого нами распределения в [2] 263 бирозеточных *P*-симметрий при $P \sqcup G_{420}$ по 75 классам изоморфности этих *P*-симметрий, а также о верности выявленных различных типов *Q*-средних групп для каждой из 75 неизоморфных между собой бирозеточных *P*-симметрий, взятых по 1 из каждого класса изоморфности, по которым распределены все 263 бирозеточные *P*-симметрии.

Что касается 1283 пятимерных точечных групп симметрии категории G_{5310}, подсчитанных в [2], то они являются точечными подгруппами выявленных в настоящей работе 5185 пятимерных групп симметрии категории G_{531}. Следовательно, поставленная в настоящей работе задача получила полное положительное решение.

Литература:

1. Палистрант Александр. Трёхмерные асимморфные кристаллографические линейные группы розеточных *P*-симметрий и их применение к завершению полного обзора пятимерных групп симметрии с инвариантными трёхмерной плоскостью и прямой в ней // STUDIA UNIVERSITATIS. Revistă ştiinţifică. Seria: Ştiinţe exacte şi economice. (Matematică. Informatică. Economie), №2(22). - Chişinău: Universitatea de Stat din Moldova, 2009, p.17-29.
2. Палистрант Александр. Бирозеточные *P*-симметрии, их свойства и геометрические приложения // STUDIA UNIVERSITATIS. Revistă ştiinţifică. Seria: Ştiinţe exacte şi economice. (Matematică. Informatică. Economie), №7(27). - Chişinău: Universitatea de Stat din Moldova, 2009, p.12-24.
3. Заморзаев А.М., Палистрант А.Ф. Геометрическая классификация *P*-симметрий // ДАН СССР, 1981, т.256, №4, с.856-859.
4. Заморзаев А.М., Карпова Ю.С., Лунгу А.П., Палистрант А.Ф. *P*-симметрия и её дальнейшее развитие. - Кишинёв: Штиинца, 1986. - 156 с.
5. Заморзаев А.М. О сильном изоморфизме групп и изоморфизме *P*-симметрий // Известия АН РМ. Математика, 1994, №1, с.75-84.
6. Палистрант Александр. Средние группы бирозеточных *P*-симметрий // STUDIA UNIVERSITATIS. Revistă ştiinţifică. Seria: Ştiinţe exacte şi economice. (Matematică. Informatică. Economie), №2(32). - Chişinău: Universitatea de Stat din Moldova, 2010, p.15-26.
7. Заморзаев А.М., Палистрант А.Ф. Геометрические аспекты теории групп. - Кишинев: Изд-во КГУ, 1978. - 59 с.
8. Заморзаев А.М. Теория простой и кратной антисимметрии. - Кишинёв: Штиинца, 1976. - 283 с.

Prezentat la 05.07.2010