STUDIA UNIVERSITATIS
Revistă științifică a Universității de Stat din Moldova, 2010, nr.7(37)

METODA COLONIILOR DE FURNICI PENTRU PROBLEMA *P*-CENTRULUI UNUI GRAF

Andrei POŞTARU
Catedra Informatică şi Optimizare Discretă

We propose an algorithm based of the Ant Colony Optimization (ACO) metaheuristic for solving the p-center problem of a non-directed graph.

Introducere

Fie $G=(V,E)$ un graf finit simplu conex cu mulțimea de vârfuri V, $|V| = n$, şi mulțimea de muchii E. Distanța dintre două vârfuri $v', v'' \in V$, notată $d(v',v'')$, reprezintă numărul de muchii care se conțin în cel mai scurt lanț ce uneşte aceste două vârfuri.

Fie V_p o submulțime a lui V ce conține p vârfuri. Prin $d(V_p, v)$ vom nota cea mai mică distanță dintre vârfurile mulțimii V_p şi vârful v, adică

$$d(V_p, v) = \min_{v_j \in V_p} d(v_j, v).$$

Mărimea $e(V) = \max_{v_j \in V} d(V_p, v_j)$ se numeşte *excentricitatea mulțimii de vârfuri* V_p.

Mulțimea V_p^* cu $|V_p^*| = p$, pentru care

$$e(V_p^*) = \min_{V_p \subset V} e(V_p)$$

se numeşte *p-centrul grafului G=(V,E).*

Mărimea $e(V_p^*)$ se numeşte *p-rază a grafului* $G=(V,E)$ şi se notează prin $r_p(G)$.

Este evident că p-centrul grafului poate fi determinat cu uşurință, dacă cunoaştem matricea distanțelor $D = \|d_{ij}\|$, $i,j = 1,2,...,n$, unde $d_{ij} = d(v_i, v_j)$, $v_i, v_j \in V$.

Dacă $p > 1$, atunci determinarea p-centrului prin examinarea fiecărei p-submulțimi de vârfuri cu alegerea ulterioară a mulțimii de rază minimă (metoda forței brute) este rațională doar pentru unele grafuri nu prea mari şi pentru p nu prea mari.

Se ştie că problema p-centrului grafului este NP-dificilă şi, în consecință, elaborarea unor algoritmi aproximativi pentru rezolvarea ei este actuală.

În ultimii ani se elaborează intens o direcție ştiințifică denumită *Calcule naturale* (Natural Computing), care întruneşte metode matematice, la baza cărora stau principiile unor mecanisme naturale de luare a deciziilor. Aceste mecanisme asigură adaptarea florei şi faunei la mediul înconjurător deja pe parcursul a câtorva milioane de ani. Printre algoritmii „naturali” în primul rând trebuie menționați algoritmii coloniei de furnici (Ant Colony Optimization), a căror bază o constituie imitarea autoorganizării unei colonii de furnici.

1. Metoda coloniei de furnici

Principiul de optimizare cu ajutorul coloniilor de furnici apare la începutul anilor 1990 şi se datorează cercetătorilor M.Dorigo, V.Maniezzo şi A.Colorni, care au expus teoria lor în articolul fondator [1].

Deja sunt obținute rezultate bune pentru rezolvarea unor astfel de probleme combinatoriale dificile, cum ar fi problema comisvoiajorului, problema de rutare a vehiculelor, problema de atribuire cuadratică, problema colorării grafului şi multe altele [2-4]. Menționăm de asemenea lucrarea autorilor T.Levanova şi M.Loreş [5], unde se rezolvă problema p-medianei unui graf. Ideea autorilor despre eliminarea succesivă a vârfurilor se dovedeşte a fi productivă şi în cazul p-centrului grafului.

Furnicile sunt insecte sociale, care formează colective. Un sistem colectiv este capabil să rezolve probleme dinamice complexe în vederea efectuării în comun a unei lucrări, care nu ar putea fi efectuată de fiecare individ al sistemului în parte fără o coordonare sau dirijare din exterior. Drept confirmare a unui comportament optimal al coloniilor de furnici poate servi şi faptul că reţeaua de muşuroaie a supercoloniilor este foarte aproape de arborele parţial al muşuroaielor. Baza comportamentului coloniei de furnici o constituie autoorganizarea, care asigură atingerea scopurilor comune ale coloniei în baza unei interacţiuni primitive. Colonia nu are o dirijare centralizată şi trăsături caracteristice ei sunt schimbul de informaţie locală numai între unii indivizi (schimb direct – hrană, contacte vizuale şi chimice) şi prezenţa unui schimb indirect, ceea ce anume se foloseşte în algoritmii coloniei de furnici. Schimbul indirect (stigmergy) reprezintă o interacţiune în timp, la care un individ modifică o zonă a mediului înconjurător, iar alţii utilizează această informaţie mai târziu, când nimeresc în ea. Biologii au stabilit că o astfel de interacţiune are loc prin intermediul unei substanţe chimice speciale – feromonul (pheromone), depuse de furnici pe obiectele de interes sau chiar în timpul mersului. Ulterior, furnicile preferă să urmeze direcţiile bogate în feromon, alegând în majoritatea cazurilor direcţiile cele mai bogate în feromon.

Adaptibilitatea comportamentului se realizează prin evaporarea feromonului, care în natură este perceput de către furnici în decurs de câteva zile. Putem face o analogie între repartizarea feromonului în spaţiul din jurul coloniei şi memoria „globală" a muşuroiului, care poartă un caracter dinamic.

Ideea algoritmului coloniei de furnici este de a modela comportamentul furnicilor reale, legat de capacitatea lor de a identifica drumul cel mai scurt situat între muşuroi şi sursa de hrană şi de a se adapta la schimbările de mediu, găsind noul drum optimal.

La deplasarea sa furnica marchează cu feromon drumul pe care urmează şi această informaţie este folosită de alte furnici pentru alegerea direcţiilor de deplasare. Modelarea evaporării permite să se evite acumularea nelimitată de feromon şi garantează că, găsind un optim local, colonia de furnici va continua să caute şi alte soluţii.

2. Algoritmul coloniei de furnici pentru problema *p*-centrului

2.1. Schema algoritmului

Algoritmul construieşte *p*-centrul grafului $G=(V,E)$, adică mulţimea respectivă $\boldsymbol{V_p}$, eliminând succesiv câte un vârf din mulţimea V până atunci când rămân neeliminate exact *p*-vârfuri. Fie

$$\boldsymbol{S_0}= V,\ \boldsymbol{S_1}=\boldsymbol{S_0}\backslash\{\boldsymbol{v_{i_1}}\},\ \ \boldsymbol{S_2}= \boldsymbol{S_1}\backslash\{\boldsymbol{v_{i_2}}\}, \dots ,\ \boldsymbol{S_{n-p}}= \boldsymbol{S_{n-p-1}}\backslash\{\boldsymbol{v_{i_{n-p}}}\},$$

unde $\boldsymbol{v_{i_1}}, \boldsymbol{v_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{v_{i_{n-p}}}$ sunt vârfurile eliminate, scrise în ordinea eliminării lor din mulţimea V.

Alegerea unui vârf pentru a fi eliminat se face în urma examinării vârfurilor neeliminate încă şi are un caracter probabilist. Factorii de care depinde probabilitatea eliminării unui vârf includ şi o caracteristică, pe care o vom numi *rază*.

Fie $\boldsymbol{v_j} \in \boldsymbol{S_k}$ un vârf neeliminat după k eliminări, $k \geq 1$.

Vom examina lanţurile geodezice maximale de forma $c(\boldsymbol{v_j}, u)$, toate vârfurile cărora, cu excepţia lui $\boldsymbol{v_j}$, sunt vârfuri eliminate. Se vede cu uşurinţă că aceste lanţuri sunt de două tipuri:

1) vârful u nu este adiacent cu nici unul din vârfurile mulţimii $\boldsymbol{S_k}$;
2) vârful u este adiacent cu cel puţin unul din vârfurile mulţimii $\boldsymbol{S_k}$.

Fie $\boldsymbol{l_i'}$ şi $\boldsymbol{l_j''}$ lungimile lanţurilor de tipul 1, respectiv de tipul 2, $i = 1,2,\dots,\boldsymbol{J'}$; $j = 1,2,\dots,\boldsymbol{J''}$.

Rază a vârfului $\boldsymbol{v_j}$ se numeşte mărimea

$$\boldsymbol{r_j} = r(\boldsymbol{v_j}) = \max\{\mathbf{max}_i\, \boldsymbol{l_i'}\ , \mathbf{max}_i \left\lceil \frac{\boldsymbol{l_i''}}{\mathbf{2}} \right\rceil\}.$$

Remarcă. Putem da o definiţie mai puţin formală a noţiunii de rază. Vom spune că vârful $\boldsymbol{v_j} \in \boldsymbol{S_k}$ „vede" vârful eliminat u , dacă există un lanţ geodezic $c(\boldsymbol{v_j}, u)$ care uneşte $\boldsymbol{v_j}$ şi u, vârfurile căruia, cu excepţia lui $\boldsymbol{v_j}$, sunt vârfuri eliminate.

Raza vârfului $\boldsymbol{v_j}$ reprezintă un astfel de număr $\boldsymbol{r_j}=r(\boldsymbol{v_j})$, încât dacă $\boldsymbol{v_j}$ „vede" un vârf eliminat u la o distanţă ce nu întrece $\boldsymbol{r_j}$, atunci nu există nici un vârf $w \in \boldsymbol{S_k}$ care „vede" vârful u la o distanţă mai mică decât $\boldsymbol{r_j}$. Astfel, raza $\boldsymbol{r_j}$ a vârfului $\boldsymbol{v_j} \in \boldsymbol{S_k}$ este distanţa la care vârfurile eliminate, văzute de $\boldsymbol{v_j}$, nu sunt văzute la o distanţă mai mică de nici un alt vârf din $\boldsymbol{S_k}$.

Este evident că raza p-centrului grafului este cea mai mare dintre razele celor p-vârfuri care formează p-centrul grafului.

2.2. Determinarea razelor vârfurilor

În general, razele vârfurilor neeliminate nu sunt constante. Ele pot varia de la un pas la altul. În momentul când vârful este eliminat raza lui devine egală cu 0.

Pasul 0. Punem r_i =0 pentru toate vârfurile v_i, $i=1,2, \dots ,n$.

Pasul 1. Alegem la întâmplare un vârf $v_{i_1} \in V$, punem r_{i_1}=0 şi eliminăm acest vârf (ceea ce înseamnă că acest vârf nu va face parte din submulţimea de p-vârfuri care urmează a fi construită în calitate de p-centru (aproximativ) al grafului).

În matricea distanţelor graficului $G=(V,E)$, liniile i care conţin elementul 1 în coloana i_1, corespund vârfurilor adiacente vârfului eliminat v_{i_1}. Razele acestor vârfuri le punem egale cu 1 : $r_i=1$. Totodată, pentru acei i, pentru care $d_{i,i_1} \neq 1$, punem $r_i = 0$.

Pasul 2. Din mulţimea vârfurilor neeliminate alegem, cu o anumită probabilitate, un vârf, de exemplu vârful v_{i_2} ; punem $r_{i_2} = 0$.

Pentru o linie a matricei distanţelor este posibil unul din cazurile:

a) nici unul din cele două elemente, situate în coloanele i_1 şi i_2 , nu este egal cu 1.

Pentru vârfurile v_i corespunzătoare acestei (acestor) linii punem $r_i = 0$ (de fapt, rămâne $r_i = 0$);

b) din cele două elemente, situate în coloanele i_1 şi i_2 , unul este egal cu 1, iar altul este mai mare decât 2. În acest caz, punem $r_i = 1$ (anterior am avut $r_i = 0$);

c) unul din cele două elemente este egal cu 1, iar altul este egal cu 2. În acest caz, punem:

$r_i=1$ dacă $|d(v_i, v_{i_1}) - d(v_i,v_{i_2})| >1$;

$r_i = 2$ dacă $|d(v_i, v_{i_1}) - d(v_i, v_{i_2})|=1$

şi în coloana în care este situat elementul 2 se află un singur 1.

Pasul k, $k\geq 2$. Din mulţimea vârfurilor neeliminate alegem, cu o anumită probabilitate, vârful v_{i_k} , punem $r_{i_k} = 0$ şi considerăm că acest vârf este eliminat.

Pentru o linie i a matricei distanţelor este posibil unul din cazurile:

a) nici unul din cele k elemente, situate în coloanele i_1 , i_2 ,..., i_k, nu este egal cu 1. Pentru astfel de i punem r_i =0 ;

b) în linia i cel puţin un element este egal cu 1, adică în mulţimea

$$\{ d(v_i ,v_{i_1}), d(v_i , v_{i_2}), \dots , d(v_i , v_{i_k}) \}$$

cel puţin un element este egal cu 1. Fie k' , $1 \leq k' \leq k$, numărul maximal, pentru care toate numerele succesive 1,2,3, ... ,k' aparţin mulţimii menţionate. Este evident că $r_i \leq k'$. Verificăm condiţiile:

Condiţia A. Există un număr k^* , $k^* \leq k'$, şi permutarea $s_1, s_2, \dots , s_{k^*}$ a numerelor $1,2, \dots ,k^*$ astfel încât $d(v_i,v_{s_1})=1$, $d(v_i,v_{s_2})= 2, \dots , d(v_i, v_{s_{k^*}}) =k^*$ şi $d(v_{s_2},v_{s_1})=d(v_{s_3}, v_{s_2})= \cdots =d(v_{s_{k^*}}, v_{s_{k^*-1}})=1$.

Condiţia B. În linia s_{k^*} a matricei distanţelor grafului $G=(V,E)$ se conţine un singur 1 (adică, vârful $v_{s_{k^*}}$ este terminal).

Dacă au loc ambele condiţii A şi B, atunci punem $r_i = k^*$. Dacă însă are loc numai condiţia A, atunci punem $r_i = \left|\frac{k^*}{2}\right|$.

La trecerea de la mulţimea S_{k-1} la mulţimea S_k prin eliminarea unui vârf, razele vârfurilor neeliminate (adică, din S_k) nu pot să se micşoreze, adică

$$\max_{v_j \in S_{k-1}} r(v_j) \leq \max_{v_j \in S_k} r(v_j) .$$

Algoritmul porneşte de la mulţimea $S_0 =V_n$ (=V) şi se încheie cu o mulţime care conţine p-vârfuri.

Fie că e construită mulţimea S_k , $k\geq 0$.

La pasul $k+1$ cu probabilitatea

$$p_i = \frac{\tau_i^t (r_{max} - r_i + \varepsilon)}{\sum_{v_j \in S_k} \tau_j^t (r_{max} - r_j + \varepsilon)} \quad (1)$$

în mulțimea S_k se alege un vârf v_0 care urmează a fi eliminat.

Aici r_j este raza vârfului $v_j \in S_k$, $r_{max} = \max_j r_j$. Parametrul $\varepsilon > 0$ garantează că orice vârf poate fi eliminat cu o probabilitate pozitivă. τ_i^t este cantitatea de feromon depus pe vârful v_i la iterația *t* a algoritmului şi reprezintă indicele unei potențiale eliminări a acestui vârf. În general, τ_i^t depinde de raza vârfului. Al doilea factor $\theta_i = r_{max} - r_i + \varepsilon$ de asemenea depinde de raza vârfului v_i, dar şi de raza maximală a vârfurilor.

2.3. Ciclul principal al algoritmului (algoritmul furnicii)

Pasul 0. Punem $S_0 = V$.

Pasul k, $k \geq 1$. 1. Dacă $|S_k| = p$, algoritmul se încheie.

2. Cu probabilitatea (1), alegem un vârf $v_{i_{k-1}}$ din mulțimea S_k.

3. Punem $S_{k+1} = S_k \setminus \{v_{i_{k+1}}\}$.

Trecem la următorul pas.

2.4. Algoritmul coloniei de furnici

Fixăm un număr de iterații t_{max}, care urmează a fi efectuate (t_{max} – durata de viață a coloniei) şi un număr de furnici m. La o iterație, fiecare furnică parcurge vârfurile grafului, eliminând succesiv $n - p$ din ele, construind astfel o submulțime V_p de *p*-vârfuri din V.

Iterația 0. Alegem nişte cantități inițiale τ_i^0 de feromon pentru vârfurile grafului, punem $r_i = 0$, $i = ,...,n$, şi alegem un $\varepsilon > 0$ mic; punem recordul inițial $R = \infty$ şi V_p^* – cea mai bună dintre soluțiile găsite (eventual, V_p^* este o submulțime oarecare de *p*-vârfuri ale mulțimii V).

Iterația t, $t \geq 1$.

1. Sunt construite m soluții admisibile (adică *m p*-submulțimi de vârfuri).
2. Din aceste soluții admisibile este aleasă cea mai bună (cele mai bune), adică *p*-submulțimea de rază minimă; memorăm $\widehat{R}$ – raza-record la iterația dată, şi $\widehat{V_p}$ – soluția corespunzătoare lui $\widehat{R}$.
3. Sunt reînnoite cantitățile de feromon τ_i^t de pe vârfurile $v_i \in S_k$.
4. Dacă $\widehat{R} < R$, atunci punem $R = \widehat{R}$ şi $V_p^* = \widehat{V_p}$.
5. Dacă au loc nişte condiții de oprire (specificate inițial), atunci algoritmul se încheie.

Trecem la iterația $t+1$.

La iterația *t* reînnoirea feromonului are loc conform formulei:

$$\tau_i^{t+1} = \frac{\tau_{min} + q^{\mu_i}(\tau_i^t - \tau_{min})}{\beta_t}. \quad (2)$$

Aici τ_{min} ($\tau_{min} > 0$) este valoarea minimal posibilă a lui τ_i^t; $\beta_t \in (0,1)$ este coeficientul de stingere (de evaporare a feromonului) la iterația *t*; $\mu_i \in [0,1]$ este frecvența relativă cu care vârful v_i apare în cele mai bune dintre soluțiile alese la pasul 2; $q \in (0,1)$ este un parametru. Din (2) se vede cu uşurință că dacă vârful v_i nu a nimerit în nici una din soluțiile cele mai bune, atunci

$$\tau_i^{t+1} = \frac{\tau_i^t}{\beta_t}.$$

De asemenea, observăm că, pentru valorile date ale parametrilor β_t **şi** q, cu cât mai des vârful v_i nimereşte în soluțiile cele mai bune, cu atât mai mică devine valoarea feromonului τ_i^t. Altfel zis, cu cât mai avantajoasă este eliminarea vârfului v_i, cu atât mai mare este nivelul de feromon al lui şi, deci, cu cât mai mic este avantajul de la eliminarea acestui vârf, cu atât mai mic este şi nivelul feromonului lui.

În încheiere vom menționa că experimentele întreprinse de numeroşi cercetători arată că eficiența algoritmilor coloniei de furnici creşte odată cu creşterea dimensiunii problemei de optimizare. Convergența este garantată, dar timpul de convergență depinde foarte mult de alegerea unor valori potrivite pentru parametri, ceea ce se poate face doar în mod experimental. Analiza teoretică a algoritmilor coloniei de furnici este dificilă, deoarece repartiția probabilităților se modifică de la o iterație la alta. Şi totuşi, astăzi tipul dat de algoritmi este obiectul unui interes sporit.

Bibliografie:

1. Dorigo M., Maniezzo V., Colorni A. The Ant System: Optimization by a Colony of Cooperating Agents // IEEE Trans. Syst. Man and Cybern, 1966, B 26(1), p.29-41.
2. Dorigo M., Gambardella L.M. Ant Colony System: A cooperative learning approach to the Traveling Salesman Problem // IEEE Trans. Evol. Com, 1997, 1, p.53-66.
3. Dorigo M., Giani Di Caro, Gambardella L.M. Ants Algorithms for Discrete Optimization // Artificial Life, 1999, vol.5, No 3, p.137-172.
4. Alaya I., Solnon C., Gheira K. Ant Algorithm for the multidimensional knapsack problem // International Conference on Bioinspired Optimisation Methods and their Applications. (BIOMA 2004), 2004, October, p.63-72.
5. Леванова Т., Лореш М. О сходимости одного алгоритма муравьиной колонии для задачи о p-медиане // 13-ая Байкальская Международная школа-семинар. Методы оптимизации и их приложения. 2-8 июля 2005. Том 1. - Иркутск, 2005, с.535-539.

Prezentat la 21.05.2010