СРЕДНИЕ ГРУППЫ БИРОЗЕТОЧНЫХ *P*-СИММЕТРИЙ

Александр ПАЛИСТРАНТ

Кафедра алгебры и геометрии

În lucrare sunt analizate 75 grupuri P ce definesc P-simetriile neizomorfe de birozete, sunt evidențiați divizorii normali netrviali Q din P şi grupurile–factor P/Q respective. În acelaşi rând, sunt descrise P-simetriile puternic izomorfe cu aceste grupuri-factor P/Q. Aceste rezultate sunt folosite la elaborarea unei metode optimale de calcul al numărului complet de grupuri noi pentru grupurile categoriei concrete date.

For obtaining of an optimum method of calculation of full number of any category of groups of birosette P-symmetries in work 75 groups of P-symmetries are presented, giving not isomorphic bi-rosette P-symmetries, not trivial normal subgroups and factor-groups P/Q of the taken groups are revealed and P-symmetries, which these factor groups P/Q are strongly isomorphic, are point out.

1. Настоящая статья является логическим продолжением [1], посвященной так называемым бирозеточным *P*-симметриям, их свойствам и геометрическим приложениям. Уточненные символы 263 бирозеточных *P*-симметрий при $P \simeq G_{420}$ полностью выписаны в [1] в системе образующих элементов групп, задающих *p*- и (*p*/)- симметрию при *p*=1, 2, 3, 4, 6.

Вывод нужных нам групп бирозеточных *P*-симметрий из простейших семейств классических групп сдерживается главным образом многочисленностью самих бирозеточных *P*-симметрий, хотя ценность этих новых групп весьма важна при исследовании многомерных групп симметрии. Именно r-мерными группами G_r^p бирозеточных *P*-симметрий, как отмечено в [1], полностью интерпретируются с точностью до строения все различные группы (r+4)-мерного эвклидова пространства, сохраняющие в нем (r+2)-мерную плоскость и вложенную в неё r-мерную плоскость, то есть группы симметрии категории $G_{(r+4)(r+2)r}$.

Выход из отмеченного громоздкого положения имеется. Для существенного сокращения обзора полного вывода r-мерных групп G_r^p бирозеточных *P*-симметрий нужно воспользоватся положениями [2], относящимися к сильно изоморфным группам и к изоморфизму *P*-симметрий. Заметим, что применение этих понятий при подсчете групп G_r^p в [3,4], вместо 32 кристаллографических *P*-симметрий, 122 гиперкристаллографических *P*-симметрий первого порядка и 624 гиперкристаллографических *P*-симметрий второго порядка при *P*, изоморфной последовательно группам симметрии категории G_{30}, G_{430} и G_{5430}, подробно изучались только, соответственно, 22, 33 и 44 неизоморфные среди них *P*-симметрии. В свою очередь при подсчете групп G_r^p в [5] вместо 31 таблеточной *P*-симметрии, 125 гипертаблеточных *P*-симметрий первого порядка и 671 гипертаблеточной *P*-симметрии второго порядка при *P*, изоморфной последовательно группам симметрии категорий G_{320}, G_{4320} и G_{54320}, детально изучались лишь, соответственно, 17, 25 и 33 неизоморфных среди них *P*-симметрии.

Следуя идеям [3-5] в [1], с целью существенного сокращения обзора полного вывода младших групп G_r^p 263 бирозеточных *P*-симметрий при $P \simeq G_{420}$, проведено распределение самих бирозеточных *P*-симметрий по классам изоморфизма, то есть в каждый из неизоморфных между собой 75-ти классов попали такие бирозеточные *P*-симметрии, группы подстановок *P* которых сильно изоморфны между собой, или проще – в один изоморфный класс попали такие бирозеточные *P*-симметрии, которые характеризуются группами подстановок *P*, имеющими одинаковое строение.

В настоящей работе, с целью значительного сокращения и облегчения обзора полного подсчета так называемых средних групп G_r^p 263 бирозеточных *P*-симметрий, для каждой из 75 неизоморфных бирозеточных *P*-симметрий, взятых по одной из каждого изоморфного класса работы [1], будут найдены нетривиальные нормальные делители, составлены фактор-группы соответствующих групп *P*, характеризующих взятые *P*-симметрии, по их нормальным делителям и выявлены связи между найденными фактор-группами для каждой группы *P*, характеризующей взятую *P*-симметрию.

2. Приведём необходимые для решения поставленной задачи основные положения разработанной в [6,2] общей теории *P*-симметрии, связанные с возможностью использования r-мерных групп G_r^p бирозеточных *P*-симметрий при исследовании субпериодических групп симметрии.

Приписывая каждой точке фигуры хотя бы один индекс i = 1,2,…,p и фиксируя некоторую группу *P* подстановок этих индексов, называем преобразованием *P*-симметрии фигуры её изометрическое преобразование, переводящее каждую точку с индексом i в точку с индексом k_i так, что подстановка $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2...p \\ k_1 & k_2...k_p \end{pmatrix} \in P$. Отсюда следует, что всякое преобразование *P*-симметрии g есть произведение симметрии s, действующее только на точки рассматриваемой фигуры, и подстановки ε, поэтому g = sε = εs. Совокупность всех преобразований *P*-симметрии взятой фигуры составляет группу *G*, входящие в них преобразования симметрии s – её порождающую группу S, а подстановки индексов ε – группу P_1. При $P_1 = P$ называем *G* группой полной *P*-симметрии, при $e \subset P_1 \subset P$ – неполной, а при $P_1 = e$ группа $G = S$. Если *G* – группа полной *P*-симметрии, то $H = G \cap S$ – её подгруппа симметрии, а $Q = G \cap P$ – подгруппа подстановок индексов (*P* тождественных преобразований).

Всякую группу *G* полной *P*-симметрии можно вывести из её порождающей *S* посредством выделения в *S* и *P* нормальных делителей *H* и *Q*, для которых существует изоморфизм фактор-группы *S*/*H* на *P*/*Q*, попарное перемножение соответствующих по изоморфизму смежных классов и объединение полученных произведений. Случаи *Q*=*P*, *Q* = e и $e \subset Q \subset P$ соответствуют делению групп *P*-симметрии на старшие, младшие и *Q*-средние (основная теорема А.М. Заморзаева о *P*-симметрии, см. [6]). Благодаря отмеченным свойствам заморзаевской *P*-симметрии, сущность которой состоит (в отличие от шубниковской антисимметрии [7]) в произвольности числа p качеств, приписываемых точкам фигуры, и (в отличие от беловской p-цветной симметрии [6]) в произвольности группы подстановок качеств при изометрических преобразованиях фигуры, ею охватываются все обобщения антисимметрии, в которых закон изменения качеств, приписываемых точкам, комбинируется прямо с изометрическим преобразованием, действующим только на точки, и не связан с выбором точек фигуры [6], а также нужные нам бирозеточные *P*-симметрии.

3.Приступим к исследованию групп G_r^P 263 бирозеточных *P*-симметрий при $P \simeq G_{420}$. Такие группы, как отмечалось выше, делятся на порождающие, старшие, младшие и *Q*-средние. Порождающие в данном случае – это r-мерные группы симметрии G_r. Вывод старших групп тривиален, так как они соответствуют случаю *Q*=*P*, поэтому изоморфизм фактор-группы *S*/*H* на *P*/*Q* возникает только тогда, когда нормальный делитель *H* группы *S* совпадает с ней. А это означает, что старшая группа *G* при этой *P*-симметрии является прямым произведением порождающей группы *S* и группы подстановок *P*, характеризующей рассматриваемую *P*-симметрию ($G = S \times P$). Младшие группы данной *P*-симметрии выводятся из определенной порождающей S, согласно основной теореме, только в том случае, если S обладает таким нормальным делителем *H*, что $S/H \cong P$, ввиду того, что для этого типа групп *P*-симметрии *Q* = e. Изучение *Q*-средних групп *P*-симметрии, согласно той же основной теореме, связано с перебиранием нетривиальных нормальных делителей *Q* групп подстановок *P*, а сам подсчет этих групп тут же становится возможным, если предварительно выявлены младшие, ибо, как показано в [2], число различных *Q*-средних групп *P*-симметрии в данном семействе равно числу различных младших групп P_0-симметрии с той же порождающей, если фактор-группа *P*/*Q* сильно изоморфна с группой подстановок P_0, определяющей P_0-симметрию (запись $P/Q \cong P_0$). При этом в семействах групп изоморфных *P*-симметрий с общей порождающей совпадают не только числа различных младших, но и числа различных средних групп. Это позволяет существенно сократить (особенно при $P \simeq G_{420}$) числовой обзор исследуемых нами групп, так как для подсчета групп G_r^P бирозеточных *P*-симметрий нужно провести подробные исследования не для всех *P*-симметрий, а для одной из каждого класса изоморфности. В настоящей работе такая возможность используется.

4.Проведенные нами исследования по выявлению Q-средних групп *P*-симметрии для каждой из 75 неизоморфных между собой бирозеточных *P*-симметрий из всех 263 различных представлены в таблице.

В первой графе этой таблицы приведены номера классов изоморфизма из [1], по которым распределяются 263 различные бирозеточные *P*-симметрии при $P \simeq G_{420}$, во второй графе описываемой таблицы указан символ одной *P*-симметрии из каждого класса изоморфизма работы [1] всех бирозеточных *P*-симметрий. В третьей графе таблицы приведены все нетривиальные нормальные делители *Q* группы *P*, отмеченной во второй графе этой таблицы *P*-симметрии. В четвертой графе описываемой таблицы перечислены все фактор-группы *P*/*Q* соответствующей *P*-симметрии и выявлена сильно изоморфная связь между её фактор-группами. Наконец, в пятой графе предложенной таблицы приведена группа *P*-симметрии, которой сильно изоморфна из графы четыре как отдельная фактор-группа *P*/*Q*, так и сильно изоморфные между собой фактор-группы. Если фактор-группа *P*/*Q* изучаемой *P*-симметрии изоморфна невыявленной группе, не входящей в множество всех 263 различных рассматриваемых нами бирозеточных *P*-симметрий, то на её месте в пятой графе приводимой таблицы стоит вопросительный знак (то есть знак ?). Заметим при этом, что три *P*-симметрии, (1,1)-, (2,1)- и (3,1)-, взятые из классов изоморфизма под номерами 1,2 и 3 работы [1], не порождают средних групп.

Таблица

72 группы P, задающие неизоморфные между собой бирозеточные P-симметрии, их нетривиальные нормальные делители и фактор-группы P/Q каждой рассматриваемой группы P по своим нормальным делителям Q.

Номера классов изоморфизма P-симметрий по [1]	Символ P-симметрий	Нетривиальные нормальные делители Q данной P-симметрии	Фактор-группы и сильно изоморфные между собой фактор-группы P/Q данной P-симметрии	Символ P-симметрии, которой изоморфны фактор-группы P/Q
4	(4,1)	(2,1).	(4,1)/(2,1) ≊.	(2,1).
5	(2,2)	(2,1), (1,2), 2^2.	(2,2)/(2,1) ≊ P/(1,2) ≊ P/2^2 ≊	(2,1).
6	(2/,1)	(2,1), (1/,1)	(2/,1)/(2,1) ≊ P/(1/,1) ≊	(2,1).
7	(6,1)	(2,1), (3,1).	(6,1)/(2,1) ≊; (6,1)/(3,1) ≊	(3,1);(2,1).
8	(3/,1)	(3,1)	(3/,1)/(3,1) ≊.	(2,1).
9	(4,2)	(2,1), (1,2), 2^2, (4,1), 4^2, (2,2).	(4,2)/(2,1)≊; (4,2)/(1,2) ≊P/2^2 ≊; (4,2)/(4,1) ≊ P/4^2≊ P/(2,2) ≊.	(2,2); (4,1); (2,1).
10	($4^{/}$,2)	(2,1), (1,2), 2^2, $4^{/}$, (2,2).	($4^{/}$, 2)/(2,1) ≊ ; ($4^{/}$, 2)/(1,2) ≊ ≊ P/2^2≊;($4^{/}$,2)/($4^{/}$);≊P/(2,2)≊.	(2/,1); (4,1); (2,1).
11	(4/,1)	(2,1), (4,1),(2/,1)	(4/,1)/(2,1) ≊ ; (4/,1)/(4,1) ≊ ≊P/(2/,1) ≊.	(2/,1); (2,1).
12	($4^{/}$/)	(2,1),$4^{/}$, (2/,1), 2/$^{/}$.	($4^{/}$/)/(2,1)≊;($4^{/}$/)/$4^{/}$ ≊ ≊P/(2/,1) ≊ P/(2/$^{/}$).	(2,2); (2,1).
13	(2/,2)	(2,1), (1,2), 2^2, (1/,1), (1/^{2}), (2/,1), (2/^{2}), (2,2),(1/^{2}) , (2^2/).	(2/,2)/(2,1)≊P/(1/,1)≊P/(1/^{2}) ≊; (2/,2)/2^2 ≊ P/(1,2) ≊; (2/,2)/(2/,1) ≊ P/(2/^{2}) ≊ P/(2^2/)≊ ≊ P/(2,2) ≊.	(2,2), (2/, 1); (2,1).
14	(2^2/, 1/)	2^2, (1,1/),$2^{/}$, (1/,1),(1/^{2}), (1/$^{/}$),(2^2/), (2^2,1/), (1/, 1/), (1/^{2},1/), (2^2/$^{/}$), ($2^{/}$/$^{/}$), ($2^{/}$/^{2}).	(2^2/,1/)/2^2 ≊ P/(1,1/) ≊ P/(1/,1) ≊ ≊P/(1/$^{/}$)≊P/(1/^{2})≊;(2^2/,1/)/$2^{/}$≊ ; (2^2/,1/)/(2^2/)≊P/(2^2,1/)≊P/($1^{/}$,1/) ≊P/(1/^{2},1/)≊ P/(2^2/$^{/}$)≊ ≊ P/($2^{/}$/$^{/}$) ≊ P/($2^{/}$/^{2}) ≊ .	(2,2); (2/,1); (2,1).
15	($2^{/}$,2)	(2,1), (1,2),2^2, (1/$^{/}$), (2/$^{/}$), (2,2), ($1^{/}$,2), (2^2/$^{/}$).	($2^{/}$,2)/(2,1) ≊ P/(1,2) ≊ P/2^2 ≊; ($2^{/}$,2)/(1/$^{/}$) ≊ ; ($2^{/}$,2)/(2/$^{/}$) ≊ ≊ P/(2,2) ≊ P/($1^{/}$,2) ≊ P/(2^2/$^{/}$)≊	(2/,1); (2,2); (2,1).
16	(3,3)	(3,1),(1,3), 3^3, 3^{-3}.	(3,3)/(3,1)≊P/(1,3)≊P/3^3≊ P/3^{-3}≊	(3,1).
17	(3,4)	(1,2), (3,1), (1,4),(3,2).	(3,4)/(1,2) ≊ ; (3,4)/(3,1) ≊ ; (3,4)/(1,4) ≊ ; (3,4)/(3,2) ≊ .	(6,1); (4,1); (3,1); (2,1).
18	(3/^{4})	(3,1), (1,2), (3,2).	(3/^{4})/(3,1) ≊ ; (3/^{4})/(1,2) ≊; (3/^{4})/(3,2) ≊ .	(4,1); (3/,1); (2,1).

19	(6,2)	(2,1),(1,2), 2^2,(3,1),(6,1), (3,2), 6^2,(2,2).	(6,2)/(2,1)≊ P/(1,2)≊P/2^2≊; (6,2)/(3,1)≊;(6,2)/(6,1)≊P/(3,2)≊ ≊ P/6^2 ≊ ; (6,2)/(2,2) ≊ .	(6,1); (2,2); (2,1); (3,1).
20	(2/,3)	(2,1),(1/,1),(1,3),(1/,3),(2,3)	(2/,3)/(2,1) ≊ P/(1/,1) ≊ ; (2/,3)/(1,3) ≊ ; (2/,3)/(1/,3) ≊ ≊ P/(2,3) ≊	(6,1); (2/,1); (2,1).
21	(6/,1)	(2,1), (3,1), (6,1), (3/,1).	(6/,1)/(2,1) ≊ ; (6/,1)/(3,1) ≊; (6/,1)/(6,1) ≊ P/(3/,1) ≊	(3/,1); (2/,1); (2,1).
22	(3/,2)	(1,2),(3,1),(3,2),(3/,1), $(3/^2)$.	(3/,2)/(1,2) ≊ ; (3/,2)/(3,1) ≊; (3/,2)/(3,2) ≊ P/(3/,1) ≊ ≊ P/$(3/^2)$ ≊ .	(3/,1); (2,2); (2,1).
23	(2/,2/)	(2,1),(1,2),(1/,1),(1,1/),2^2, $(1/^{/})$, $2^{/}$,$(1/^2)$, (2/,1),(1,2/), (2,2),(1/,1/), (2,1/),(1/,2), $(2/^2)$, $(2/^{/})$, $(2^2/)$,) $(2^{/}/)$, $(2^{/},2)$,$(1/^{/},2)$,$(2^2,1/)$,$(1/^2,1/)$, $(2^2/^{/})$,$(2^{/}/^2)$,(2/,2),(2/,1/), (2,2/),(1/,2/),$(2^{/}/,2)$,$(2/^{/},2)$, $(2/^2$, 1/), $(2^2/,1/)$.	(2/,2/)/(2,1)≊P/(1,2) ≊ P/(1/,1) ≊ ≊ P/(1,1/)≊ P/$2^{/}$≊ P/$(1/^2)$ ≊ ; (2/ ,2/)/$(1/^{/})$ ≊ ; (2/, 2/)/2^2 ≊ ; (2/,2/)/(2/,1)≊ P/(1,2/) ≊ P/$(2/^2)$ ≊ ≊ P/$(2^{/},2)$ ≊ P/$(2^2/)$ ≊ P/$(2^2,1/)$≊ ≊ P/$(2^2/^{/})$ ≊ ; (2/,2/)/(2,2) ≊ ≊P/(1/,1/) ≊ P/$(2/^{/})$ ≊ P/$(1/^{/},2)$ ≊ ≊ P/(2,1/) ≊ P/(1/,2) ≊ P/$(2^{/}/)$ ≊ ≊ P/$(1/^2,1/)$ ≊ P/$(2^{/}/^2)$ ≊ ; (2/,2/)/(2/,2)≊P/(2/,1/)≊P/(2,2/)≊ ≊P/(1/,2/)≊P/$(2^{/}/,2)$≊P/$(2/^{/},2)$ ≊ ≊ P/$(2/^2,1/)$ ≊ P/$(2^2/,1/)$ ≊ .	 (2/, 2); $\underline{1}1^{/\,*}1$; ?; (2/,1); (2,2); (2,1).
24	(4,4)	(2,1),(1,2),2^2,(2,2),(4,1),(1,4), 4^4, 4^{-4},4^2,2^4, (4,2), (2,4),$(4^4,2)$.	(4,4)/(2,1) ≊ P/(1,2) ≊ P/2^2 ≊ ; (4,4)/(2,2) ≊;(4,4)/(4,1) ≊P/(1,4) ≊ ≊ P/4^4 ≊ P/4^{-4} ≊ P/4^2 ≊ P/2^4 ≊; (4,4)/(4,2) ≊ P/(2,4) ≊ P/$(4^4,2)$ ≊.	(4,2); (2,2); (4,1); (2,1).
25	(2/,4)	(2,1),(1/,1),(1,2),2^2,$(1/^2)$,(2/,1), (2,2), (1/,2), $(2/^2)$,$(2^2/)$, (1,4), 2^4, $(1/^4)$, (2/,2),(2,4),$(2/^4)$, $(2^4/)$, (1/,4).	(2/,4)/(2,1) ≊ P/$(1/^2)$ ≊ P/((1/,1) ≊; (2/,4)/(1,2) ≊ ; (2/,4)/2^2 ≊ ; (2/,4)/)/(2/,1) ≊ P/$(2/^2)$ ≊ P/$(2^2/)$≊ ; (2/,4)/(1,4) ≊ P/2^4 ≊ ; (2/,4)/(2,2)≊ ≊ P/$(1/^4)$ ≊ P/(1/,2) ≊ ; (2/,4)/(2/,2) ≊ P/(2,4) ≊ P/$(2/^4)$ ≊ ≊ P/$(2^4/)$ ≊ P/(1/,4) ≊ .	(4,2); (2/,2); ?; (4,1); (2/,1); (2,2); (2,1).
26	(4/,2)	(2,1), (1,2), 2^2,(4,1), (2,2), 4^2, (2/,1),$(2/^2)$,(4/,1), $(4/^2)$,$(4^2/)$, (4,2), (2/,2).	(4/,2) /(2,1) ≊; (4/,2)/(1,2) ≊ ≊ P/2^2 ≊ ; (4/,2)/(4,1) ≊ P/(2/,1) ≊ ≊ P/$(2/^2)$ ≊ ; (4/,2)/(2,2) ≊ P/4^2 ≊; (4/2,)/(4/,1) ≊ P/$(4/^2)$ ≊ P/$(4^2/)$ ≊ ≊ P/(4,2) ≊P/(2/,2) ≊	(2/,2); (4/,1); (2,2); (2/,1); (2,1).
27	$(4^2/,1/)$	(2,1), (1,1/), $2^{/}$, 4^2, (2/,1),$4^{/}$, (2,1/),$(2/^2)$, $(2/^{/})$, $(4^2/)$, $(4^2/^{/})$, (2/,1/), $(4^{/}/)$, $(4^{/}/^2)$.	$(4^2/,1/)$/(2,1)≊;$(4^2/,1/)$/(1,1/)≊P/$2^{/}$≊ $(4^2/$, 1/)/4^2 ≊ P/(2/,1) ≊ P/$(4^{/})$ ≊ ≊ P/(2,1/) ≊ P/$(2/^2)$ ≊ P/$(2/^{/})$ ≊; $(4^2/,1/)$/$(4^2/)$ ≊ P/$(4^2/^{/})$ ≊ P/(2/,1/)≊ ≊ P/$(4^{/}/)$≊ P/$(4^{/}/^2)$ ≊.	$(2^2/,1/)$; $(4^{/}/)$; (2,2); (2,1).
28	$(4/^{/},2)$	(2,1), (1,2), 2^2, (4,1),(2,2), 4^2,$(2/^{/})$, $(4/^{/})$, $(4^2/^{/})$,(4,2), $(2/^{/},2)$.	$(4/^{/},2)$/(2,1)≊; $(4/^{/},2)$/(1,2)≊P/2^2 ≊; $(4/^{/},2)$/(4,1) ≊ P/(2,2) ≊ P/4^2 ≊; $(4/^{/},2)$/$(2/^{/})$ ≊ ; $(4/^{/},2)$/$(4/^{/})$ ≊ ≊ P/$(4^2/^{/})$≊ P/(4,2) ≊ P/$(2/^{/},2)$ ≊.	$(2/^{/},2)$; (4/,1); (2/,1); (2,2); (2,1).
29	$(4^4/^{/},2)$	(2,1), (1,2), 2^2, 4^4, 4^{-4},(2,2) $(2^2/^{/})$, $(4^4/^{/})$,$(4^{-4}/^{/})$,$(4^4,2)$, $(2/^{/},2)$.	$(4^4/^{/},2)$/(2,1)≊P/(1,2)≊;$(4^4/^{/},2)$/2^2≊; $(4^4/^{/},2)$/4^4 ≊ P/4^{-4} ≊ P/(2,2) ≊; $(4^4/^{/},2)$/$(2^2/^{/})$≊; $(4^4/^{/},2)$/$(4^4/^{/})$≊ ≊ P/$(4^{-4}/^{/})$ ≊ P/$(4^4,2)$ ≊ P/$(2/^{/},2)$ ≊.	(4/,1); $(2/^{/},2)$; (2/,1); (2,2); (2,1).
30	$(4^4/)$	(2,1), (1,2),2^2, (2,2), (2/,1),	$(4^4/)$/(2,1) ≊; $(4^4/)$/(1,2) ≊P/2^2≊;	(4,2); $(4^{/}/)$;

		$(2/^{2}), (2/,2), (2/^{4}), (4^{4},2).$	$(4^{4}/)/(2/,1) \approxeq P/(2/^{2}) \approxeq ;$ $(4^{4}/)/(2,2) \approxeq ; (4^{4}/)/(2/2) \approxeq$ $\approxeq P/(2/^{4}) \approxeq P/(4^{4},2) \approxeq$	(4,1); (2,2); (2,1).
31	$(4^{/}/^{4})$	$(2,1), (1,2), 2^{2}, (2,2), (2^{2}/^{/}),$ $(4,2), (2/^{4}), (2^{/},2).$	$(4^{/}/^{4})/(2,1) \approxeq P/(1,2) \approxeq ; (4^{/}/^{4})/2^{2} \approxeq ;$ $(4^{/}/^{4})/(2,2) \approxeq ; (4^{/}/^{4})/(2^{2}/^{/}) \approxeq ;$ $(4^{/}/^{4})/(4,2) \approxeq P/(2/^{4}) \approxeq P/(2^{/},2) \approxeq .$	$(4^{/}/)$; ?; (2,2); (4,1); (2,1).
32	$(4/^{4})$	$(2,1),(1,2),2^{2},(4,1),4^{2}, (2,2),$ $(4,2), (2/^{4}).$	$(4/^{4})/(2,1) \approxeq ; (4/^{4})/(1,2) \approxeq ;$ $(4/^{4})/2^{2} \approxeq ; (4/^{4})/(4,1) \approxeq$ $\approxeq P/4^{2} \approxeq ; (4/^{4})/(2,2) \approxeq ;$ $(4/^{4})/(4,2) \approxeq P/(2/^{4}) \approxeq .$	$(4^{/},2)$; (4/,1); ? ; (4,1); (2/,1); (2,1).
33	(6,3)	$(2,1), (3,1), (1,3), 3^{3}, 3^{-3},$ $(6.1), 6^{3},6^{-3}, (2,3), (3,3).$	$(6,3)/(2,1) \approxeq ;(6,3)/(3,1) \approxeq P/(1,3) \approxeq$ $\approxeq P/3^{3} \approxeq P/3^{-3} \approxeq ; (6,3)/(6,1) \approxeq P/6^{3} \approxeq$ $\approxeq P/6^{-3} \approxeq P/(2,3) \approxeq ; (6,3)/(3,3) \approxeq .$	(3,3); (6,1); (3,1); (2,1).
34	(3/,3)	(3,1),(1,3),(3/,1),(3,3).	$(3/,3)/(3,1) \approxeq ; (3/,3)/(1,3) \approxeq ;$ $(3/,3)/(3/,1) \approxeq ; (3/,3)/(3,3) \approxeq .$	(6,1); (3/,1); (3,1); (2,1).
35	$(3^{/},3)$	$(3,1), (1,3), 3^{3}, 3^{-3}, (3^{3}/^{/}),$ $(3^{-3}/^{/}), (3,3).$	$(3^{/},3)/(3,1) \approxeq P/(1,3) \approxeq P/3^{3} \approxeq P/3^{-3} \approxeq$ $(3^{/},3)/(3^{3}/^{/}) \approxeq P/(3^{-3}/^{/}) \approxeq$ $(3^{/},3)/(3,3) \approxeq .$	(3/,1); (3,1); (2,1).
36	(6,4)	$(2,1),(1,2),2^{2},(3,1),(1,4),(2,2),$ $2^{4},(6,1),6^{2},(3,2),(2,4),(6,2),$ $6^{4}, (3,4).$	$(6,4)/(2,1) \approxeq P/2^{2} \approxeq ;(6,4)/(1,2) \approxeq ;$ $(6,4)/(3,1) \approxeq ;(6,4)/(1,4) \approxeq P/(2,2) \approxeq$ $P/2^{4} \approxeq ;(6,4)/(6,1) \approxeq P/6^{2} \approxeq ;$ $(6,4)/(3,2) \approxeq ; (6,4)/(2,4) \approxeq ;$ $(6,4)/(6,2) \approxeq P/6^{4} \approxeq P/(3,4) \approxeq .$	(3,4);(6,2); (2,4); (6,1);(4,1); (2,2); (3,1); (2,1).
37	(6,2/)	$(2,1), (1,2), 2^{2}, (1,1/), 2^{/},$ $(3,1),(2,2),(2,1/),(1,2/),(2^{2},1/),$ $(2^{/},2), (6,1), 6^{2}, (3,2), 6^{/},$ $(3,1/), (2,2/), (6,2), (6,1/) ,$ $(3,2/).$	$(6,2/)/(2,1) \approxeq ;(6,2/)/(1,2) \approxeq P/(1,1/) \approxeq$ $\approxeq P/2^{2} \approxeq P/2^{/} \approxeq ; (6,2/)/(3,1) \approxeq ;$ $(6,2/)/(1,2/) \approxeq P/(2,2) \approxeq P/(2,1/) \approxeq$ $\approxeq P/(2^{2},1/) \approxeq P/(2^{/},2) \approxeq ;(6,2/)/(6,1) \approxeq$ $\approxeq P/6^{2} \approxeq P/6^{/} \approxeq ; (6,2/)/(3,1/) \approxeq$ $\approxeq P/(3,2) \approxeq ; (6,2/)/(2,2/) \approxeq ;$ $(6,2/)/(6,2) \approxeq P/(6,1/) \approxeq P/(3,2/) \approxeq .$	(2/,3); (6,2); (2/,2); (6,1); (2/,1); (2,2); (3,1); (2,1).
38	(3/,2/)	$(1,2), (1,1/), (3,1), (1,2/),$ $(3,2),(3,1/),(3/,1),(3/^{2}),(3/^{/}),$ $(3,2/),(3/,2),(3/,1/).$	$(3/,2/)/(1,2) \approxeq P/(1,1/) \approxeq ;(3/,2/)/(3,1) \approxeq ;$ $(3/,2/)/(1,2/) \approxeq ; (3/,2/)/(3,2) \approxeq$ $\approxeq P/(3,1/) \approxeq P/(3/^{/}) \approxeq ;$ $(3/,2/)/(3/,1) \approxeq P/(3/^{2}) \approxeq ;$ $(3/, 2/)/(3,2/) \approxeq P/(3/,2) \approxeq$ $\approxeq P/(3/, 1/) \approxeq .$	(3/,2);(2/,2); (3/,1); (2,2); (2/,1); (2,1).
39	(6/,2)	$(2,1),(1,2),2^{2}, (3,1),(2,2),$ $(6,1),(3,2),6^{2},(3/,1), (3/^{2}),$ $(6/,1),(6/^{2}), (6^{2}/), (6,2),(3/,2).$	$(6/,2)/(2,1) \approxeq ; (6/,2)/(1,2) \approxeq$ $\approxeq P/2^{2} \approxeq ; (6/,2)/(3,1) \approxeq ;$ $(6/,2)/(6,1) \approxeq P/(3/, 1) \approxeq P/(3/^{2}) \approxeq ;$ $(6/,2)/(3,2) \approxeq P/6^{2} \approxeq ;$ $(6/,2)/(2,2) \approxeq ; (6/,2)/(6/,1) \approxeq$ $\approxeq P/(6/^{2}) \approxeq P/(6^{2}/) \approxeq P/(6,2) \approxeq P/(3/,2) \approxeq$	(3/,2); (6/,1);(2/,2); (2,2); (2/,1); (3/,1); (2,1).
40	$(6^{/},2)$	$(2,1),(1,2),2^{2}, (3,1),(2,2),$ $(6,1),6^{2}, (3,2),(3/^{/}), (6,2),$ $(6/^{/}), (6^{2}/^{/}),(3^{/},2).$	$(6^{/},2)/(2,1) \approxeq P/(1,2) \approxeq P/2^{2} \approxeq ;$ $(6^{/},2)/(3,1) \approxeq ; (6^{/},2)/(2,2) \approxeq ;$ $(6^{/},2)/(6,1) \approxeq P/6^{2} \approxeq P/(3,2) \approxeq ;$ $(6^{/},2)/(3^{/},1) \approxeq ; (6^{/},2)/(6,2) \approxeq$ $\approxeq P/(6/^{/}) \approxeq P/(6^{2}/^{/}) \approxeq P/(3^{/},2) \approxeq$	(6/,1); $(2^{/},2)$;(3/,1); (2/,1); (2,2); (2,1).
41	$(6^{2}/,1/)$	$2^{2},(1,1/), 2^{/}, (3,1), (2^{2},1/),$ $6^{2}, 6^{/}, (3,1/),(3/,1), (3/^{2}),$ $(6^{2},1/),(6^{2}/), (6^{/}/), (6^{/}/^{2}),$ $(3/, 1/).$	$(6^{2}/,1/)/2^{2} \approxeq P/(1,1/) \approxeq P/2^{/} \approxeq ;$ $(6^{2}/,1/)/(3,1) \approxeq ; (6^{2}/, 1/)/(2^{2},1/) \approxeq ;$ $(6^{2}/,1/)/6^{2} \approxeq P/6^{/} \approxeq P/(3,1/) \approxeq P/(3/,1) \approxeq$ $\approxeq P/(3/^{2}) \approxeq ; (6^{2}/,1/)/(6^{2},1/) \approxeq$ $\approxeq P/(6^{2}/) \approxeq P/(6^{/}/) \approxeq P/(6^{/}/^{2}) \approxeq$ $\approxeq P/(3/, 1/) \approxeq .$	(3/,2); $(2^{2}/,1/)$; (3/,1); (2,2); (2,1).

42	$(6^{/}/,2)$	$(1,2),2^{/},(3,1),(2^{/},2),6^{/},(3,2),$ $(3/,1),(3/^{/}),(6^{/},2),(6^{/}/),$ $(6^{/}/^{2}),(3/,2),\ (3/^{/},2).$	$(6^{/}/,2)/(1,2)\approxeq P/2^{/}\approxeq;\ (6^{/}/,2)/(3,1)\approxeq;$ $(6^{/}/,2)/(2^{/},2)\approxeq;(6^{/}/,2)/6^{/}\approxeq P/(3,2)\approxeq;$ $(6^{/}/,2)/(3/,1)\approxeq P/(3/^{/})\approxeq;$ $(6^{/}/,2)/(6^{/},2)\approxeq P/(6^{/}/)\approxeq P/(6^{/}/^{2})\approxeq$ $\approxeq P/(3/,2)\approxeq P/(3/^{/},2)\approxeq.$	(3/,2);(2/,2); (3/,1);(2,2); (2/,1); (2,1).
43	(4/,3)	(2,1),(1,3),(4,1),(2,3), (4/,1), (2/,3),(4,3).	$(4/,3)/(2,1)\approxeq;\ (4/,3)/(1,3)\approxeq;$ $(4/,3)/(4,1)\approxeq;\ (4/,3)/(2,3)\approxeq;$ $(4/,3)/(4/,1)\approxeq;(4/,3)/(2/,3)\approxeq P/(4,3)\approxeq.$	(2/,3); (4/,1); (6,1); (2/,1); (3,1); (2,1).
44	$(4^{2}/,3)$	$(2,1),(1,3),4^{2},\ (2,3),(4^{2}/),$ $(2/,3),\ \ (2/^{2},3),\ (4^{2},3).$	$(4^{2}/,3)/(2,1)\approxeq;\ (4^{2}/,3)/(1,3)\approxeq;$ $(4^{2}/,3)/4^{2}\approxeq;\ (4^{2}/,\ 3)/(2,3)\approxeq;$ $(4^{2}/,3)/(4^{2}/)\approxeq;(4^{2}/,3)/(2/,3)\approxeq P/(2/^{2},3)\approxeq$ $P/(4/^{2},3)\approxeq.$	(6,2); $(4^{/}/)$; (6,1); (2,2); (3,1); (2,1).
45	$(6^{4}/)$	$(1,2),(3,1),\ 2^{4},\ (3,2),\ 6^{4},$ $(3/,2),\ (3/^{4}).$	$(6^{4}/)/(1,2)\approxeq;\ (6^{4}/)/(3,1)\approxeq;$ $(6^{4}/)/2^{4}\approxeq;\ (6^{4}/)/(3,2)\approxeq;$ $(6^{4}/)/6^{4}\ \approxeq P/(3/,2)\approxeq P/(3/^{4})\approxeq.$	(3/,2); (4,2); (3/,1); (2,2); (2,1).
46	$(6/^{4})$	$(2,1),(1,2),2^{2},(3,1),(2,2),(6,1),$ $6^{2},\ (3,2),(6,2),\ (3/^{4}).$	$(6/^{4})/(2,1)\approxeq P/2^{2}\approxeq;\ (6/^{4})/(1,2)\approxeq;$ $(6/^{4})/(3,1)\approxeq;\ (6/^{4})/(2,2)\approxeq;$ $(6/^{4})/(6,1)\approxeq P/6^{2}\approxeq;\ (6/^{4})/(3,2)\approxeq;$ $(6/^{4})/(6,2)\approxeq P/(3/^{4})\approxeq.$	$(3/^{4})$;(6/,1); $(4^{/},2)$; (3/,1); (4,1); (2/,1); (2,1)
47	$(4^{/}/,3)$	$(2,1),\ (1,3),(2/,1),(2,3),$ $(2/,3),\ (4^{/},3).$	$(4^{/}/,3)/(2,1)\approxeq;\ (4^{/}/,3)/(1,3)\approxeq;$ $(4^{/}/,3)/(2/,1)\approxeq;\ (4^{/}/,3)/(2,3)\approxeq;$ $(4^{/}/,3)/(2/,3)\approxeq P/(4^{/},3)\approxeq.$	(6/, 1); $(4^{/}/)$; (3/,1); (2,2); (2,1).
48	$(4/^{/},3)$	$(2,1),(1,3),(4,1),(2,3),(2/^{/},3),$ $(4,3).$	$(4/^{/},3)/(2,1)\approxeq;\ (4/^{/},3)/(1,3)\approxeq;$ $(4/^{/},3)/(4,1)\approxeq;\ (4/^{/},3)/(2,3)\approxeq;$ $(4/^{/},3)/(2/^{/},3)\approxeq P/(4,3)\approxeq.$	(6/,1); (4/,1); (3/,1); (2/,1); (2,1).
49	(3/,4)	$(1,2),(3,1),(1,4),(3,2),(3/,1),$ $(3/^{2}),(3,4),(3/,2),(3/^{4}).$	$(3/,4)/(1,2)\approxeq;\ (3/,4)/(3,1)\approxeq;$ $(3/,4)/(1,4)\approxeq;\ (3/,4)/(3,2)\approxeq;$ $(3/,4)/(3/,1)\approxeq P/(3/^{2})\approxeq;$ $(3/,4)/(3,4)\approxeq P/(3/,2)\approxeq P/(3/^{4})\approxeq.$	(3/,2);(4,2); (3/,1); (2,2); (4,1); (2,1).
50	(4/,4)	$(2,1),(1,2),\ 2^{2},(4,1),4^{2},(2/,1),$ $(2/^{2}),(1,4),\ (2,2),(4,2),(2,4),$ $(4/,1),\ (4/^{2}),(2/,2),(2/^{4}),$ $(4,4),(4/,2),(4/^{4}),(4^{4}/).$	$(4/,4)/(2,1)\approxeq;\ (4/,4)/(1,2)\approxeq;$ $(4/,4)/2^{2}\approxeq;\ (4/,4)/(4,1)\approxeq P/(2/,1)\approxeq$ $\approxeq P/(2/^{2})\approxeq;(4/,4)/4^{2}\ \approxeq;$ $(4/,4)/(1,4)\approxeq;\ (4/,4)/(2,2)\approxeq;$ $(4/,4)/(4,2)\approxeq P/(2/,2)\approxeq P/(2/^{4})\approxeq;$ $(4/,4)/(2,4)\approxeq;(4/,4)/(4/,1)\approxeq P/(4/^{2})\approxeq;$ $(4/,4)/(4,4)\approxeq P/(4/,2)\approxeq P/(4/^{4})\approxeq P/(4^{4}/)\approxeq.$	(2/,4); (4/,2); ? (4,2); ?; (4/,1); (2/,2); (2,2); (2/,1);(4,1); (2,1).
51	(4/,2/)	$(2,1),(1,2),(1,1/),2^{2},\ 2^{/},$ $(4,1),4^{2},4^{/},(2/,1),\ (2/^{2}),$ $(2/^{/}),(2,2),(2,1/),(1,2/),$ $(2^{2},1/),\ (2^{/},2),\ (4,2),(4,1/),$ $(4/,1),\ (4/^{2}),(4/^{/}),(4^{2}/),$ $(4^{/}/),(4^{2}/^{/}),\ (4^{/}/^{2}),(2/,2),$ $(2/,1/),(2/^{/},2),(2/^{2},1/),(4^{2},1/),$ $(4^{/},2),(2,2/),(4/,2),(4/,1/),$ $(2/,2/),(4/^{/},2),(4/^{2},1/),$ $(4^{/}/,2),(4^{2}/,1/),(4,2/).$	$(4/,2/)/(2,1)\approxeq;\ (4/,2/)/(1,2)\approxeq$ $\approxeq P/(1,1/)\approxeq P/(2^{/})\approxeq;$ $(4/,2/)/2^{2}\approxeq;\ (4/,2/)/(4,1)\approxeq$ $\approxeq P/4^{2}\approxeq P/4^{/}\approxeq P/(2/,1)\approxeq P/(2/^{2})\approxeq$ $\approxeq P/(2/^{/})\approxeq P/(2,2)\approxeq P/(2,1/)\approxeq;$ $(4/,2/)/(1,2/)\approxeq P/(2^{2},1/)\approxeq$ $\approxeq P/(2^{/},2)\approxeq;\ (4/,2/)/(4,2)\approxeq$ $\approxeq P/(4,1/)\approxeq P/(4^{/}/)\approxeq P/(4^{/}/^{2})\approxeq$ $\approxeq P/(2/,2)\approxeq P/(2/,1/)\approxeq P/(2/^{/},2)\approxeq$ $\approxeq P/(2/^{2},1/)\approxeq;\ (4/,2/)/(2/,1)\approxeq$ $\approx P/(4/^{2})\approx P/(4/^{/})\approx P/(4^{2}/)\approx$	(2/,2/); (4/,2); ? (2/,2); (4/,1); (2,2);
			$\approxeq P/(4^{2}/^{/})\approxeq P/(4^{2},1/)\approxeq P/(4^{/},2)\approxeq P/(2,2/)\approxeq;$ $(4/,2/)/(4/,2)\approxeq P/(4/,1/)\approxeq P/(2/,2/)\approxeq$ $\approxeq P/(4/^{/},2)\approxeq P/(4/^{2},1/)\approxeq P/(4^{/}/,2)\approxeq$ $\approxeq P/(4^{2}/,1/)\approxeq P/(4,2/)\approxeq.$	(2/,1); (2,1).
52	$(4^{4}/,1/)$	$(2,1),\ (1,2),2^{2},\ (1,2/),(2/,1)$ $(2/^{2}),(2^{/},2),(2,2),(2/,2),$	$(4^{4}/,1/)/(2,1)\approxeq P/(1,2)\approxeq;$ $(4^{4}/,1/)/2^{2}\approxeq;\ (4^{4}/,1/)/(1,2/)\approxeq P/(2/,1)\approxeq;$	? ; ?; $(4^{/}/)$;

 ISSN 1857-2073

		(2,2/), (2/$^{/}$,2), (2/^{4}), ($4^{/}$,2),(4^{4}/),(4^{4}/$^{/}$),($4^{/}$/^{4}), ($4^{/}$/,2),(2/^{4},1/), (2/,2/)	(4^{4}/,1/)/(2/^{2}) ≊ P/($2^{/}$,2) ≊; (4^{4}/,1/)/(2,2)≊;(4^{4}/,1/)/(2/,2) ≊(P/2,2/) ≊ ≊ P/(2/^{4}) ≊ P/(2/$^{/}$,2) ≊ P/($4^{/}$,2) ≊; (4^{4}/,1/)/(4^{4}/) ≊ P/(4^{4}/$^{/}$) ≊ ≊ P/($4^{/}$/^{4}) ≊ P/($4^{/}$/,2) ≊ P/(2/^{4},1/)≊ ≊ P/(2/,2/)≊.	(4,2); (2^{2}/,1/); (2,2); (2,1).
53	(4/^{4},1/)	(2,1), (1,2), 2^{2}, (4,1), 4^{2},(1,2/), (2,2), ($2^{/}$,2),(2,2/), (2/^{4}), ($4^{/}$,2),(2/$^{/}$,2), (4/^{4}), (4,2/), (4/$^{/}$,2), (2/^{4},$1^{/}$).	(4/^{4},1/)/(2,1) ≊ ; (4/^{4},1/)/(1,2) ≊ ; (4/^{4},1/)/2^{2} ≊; (4/^{4},1/)/(4,1) ≊ ≊ P/4^{2} ≊ ; (4/^{4},1/)/(1,2/) ≊ ; ≊ P/($2^{/}$,2) ≊ ; (4/^{4},1/)/(2,2) ≊ ; (4/^{4},1/)/(2,2/) ≊ P/($4^{/}$,2) ≊ ; (4/^{4},1/)/(2/^{4}) ≊ P/(2/$^{/}$,2) ≊; (4/^{4},1/)/(4/^{4})≊P/(4,2/)≊P/(4/$^{/}$,2) ≊ ≊ P/(2/^{4},1/) ≊.	(4^{2}/,1/); (4/,2); ? ($4^{/}$/); (4/,1); (2/,2); (2/,1); (2,2); (2,1).
54	(4/$^{/}$,4)	(2,1),(1,2),2^{2}, (4,1),(4^{2}), 4^{4},4^{-4},(2,2),(1,4), 2^{4},(4,2), (2,4), (4^{4},2), (2/$^{/}$,2),(4/$^{/}$,2), (2/$^{/}$,4), (4,4).	(4/$^{/}$,4)/(2,1)≊P/(1,2)≊ ; (4/$^{/}$,4)/2^{2}≊; (4/$^{/}$,4)/(4,1) ≊ P/4^{2} ≊ P/4^{4}≊ P/4^{-4}≊ ≊ P/(1,4) ≊ P/2^{4}≊; (4/$^{/}$,4)/(2,2) ≊; (4/$^{/}$,4)/(4,2) ≊P/(2,4) ≊ P/(4^{4},2) ≊; (4/$^{/}$,4)/(2/$^{/}$,2) ≊ ; (4/$^{/}$,4)/(4/$^{/}$,2) ≊ ≊ P/(2/$^{/}$,4) ≊ P/(4,4) ≊.	(4/$^{/}$,2); ?; (4/,1); (2/$^{/}$,2); (2/,1); (2,2); (2,1).
55	(6,6)	(2,1),(1,2),2^{2},(3,1),(1,3), 3^{3}, 3^{-3}, (2,2), (6,1), (1,6),6^{3},6^{-3}, (3,2),(2,3),6^{2},(2^{2},3),(3^{3},2) (3^{-3},2), 6^{6},6^{-6},(3,3),(6,2), (2,6),(6^{3},2),(6^{-3},2),(6,3), (3,6),(6^{2},3).	(6,6)/(2,1) ≊ P/(1,2) ≊ P/2^{2}≊; (6,6)/(3,1)≊P/(1,3)≊P/3^{3} ≊ P/3^{-3}≊; (6,6)/(2,2) ≊; (6,6)/(6,1) ≊P/(1,6)≊P/6^{3}≊ ≊ P/6^{-3}≊P/(3,2) ≊ P/(2,3) ≊ P/6^{2}≊ ≊ P/(2^{2},3) ≊ P/(3^{3},2) ≊ P/(3^{-3},2) ≊ ≊P/6^{6}≊P/6^{-6}≊; (6,6)/(3,3) ≊ ; (6,6)/(6,2) ≊ P/(2,6) ≊ P/(6^{3},2) ≊ ≊P/(6^{-3},2)≊;(6,6)/(6,3)≊P/(3,6)≊P/(6^{2},3) ≊.	(6,3); (6,2); (3,3); (6,1);(2,2); (3,1); (2,1).
56	(3/,3/)	(3,1),(1,3),(3/,1),(1,3/), (3,3),(3/,3),(3,3/).	(3/,3/)/(3,1) ≊ P/(1,3) ≊; (3/,3/)/(3/,1) ≊ P/((1,3/)≊; (3/,3/)/(3,3) ≊; (3/,3/)/(3/,3) ≊ ≊ P/(3,3/)≊.	(3/,2); (3/,1); (2,2); (2,1).
57	(6,3/)	(2,1),(3,1),(1,3),(6,1),(1,3/), (2,3),(3,3),(2,3/),(6,3), (3,3/).	(6,3/)/(2,1) ≊; (6,3/)/(3,1) ≊ ; (6,3/)/(1,3) ≊ ; (6,3/)/(6,1) ≊ ; (6,3/)/(1,3/)≊P/(2,3)≊;(6,3/)/(3,3) ≊ (6,3/)/(2,3/)≊;(6,3/)/(6,3)≊P/(3,3/)≊.	(3,3/); (2,3/); (6,2);(3/,1); (6,1);(2,2); (3,1);(2,1).
58	(6/,3)	(2,1),(3,1),(1,3),(6,1),(3/,1), (2,3),(3,3),(6/,1),(6,3).	(6/,3)/(2,1)) ≊ ; (6/,3)/(3,1)) ≊; (6/,3)/(1,3)≊;(6/,3)/(6,1)≊P/(3/,1)≊; (6/,3)/(2,3) ≊ ; (6/,3)/(3,3) ≊; (6/,3)/(6/,1) ≊; (6/,3)/(6,3) ≊.	(3/,3);(2/,3); (6/,1);(6,1); (3/,1);(2/,1); (3,1);(2,1).
59	(6/$^{/}$,3)	(2,1),(3,1),(1,3),3^{3},3^{-3}, (6,1),(2,3),6^{3},6^{-3},(3,3), (6,3),(3/$^{/}$,3).	(6/$^{/}$,3)/(2,1)≊;(6/$^{/}$,3)/(3,1)≊P/(1,3) ≊ ≊P/3^{3}≊P/3^{-3}≊; (6/$^{/}$,3)/(6,1) ≊ ≊ P/(2,3)≊P/6^{3}≊P/6^{-3}≊;(6/$^{/}$,3)/(3,3)≊; (6/$^{/}$,3)/(6,3) ≊ P/(3/$^{/}$,3) ≊.	(3/$^{/}$,3); (6/,1); (3/,1); (2/,1); (2,1).
60	($6^{/}$/,3)	(3,1), (1,3), (3/,1), ($2^{/}$,3), (3,3), ($6^{/}$,3), (3/,3).	($6^{/}$/,3)/(3,1) ≊ P/(1,3) ≊ ; ($6^{/}$/,3)/(3/,1) ≊ P/($2^{/}$,3) ≊ ; ($6^{/}$/,3)/(3,3) ≊ ; ($6^{/}$/,3)/($6^{/}$,3) ≊ ≊ P/(3/,3) ≊.	(3/,2); (3/,1); (2,2); (2,1).
61	(6,4/)	(2,1), (1,2), 2^{2}, (3,1),(1,4), (1,2/), (2,2), (2/,2), 2^{4}, (6,1), (3,2), 6^{2},(1,4/), (2,2/) (2,4), ($2^{/}$,4), (2^{4},1/), (3,4), (3,2/), (6,2), ($6^{/}$,2), 6^{4}, (2,4/),(6,2/), (6,4), ($6^{/}$,4),	(6,4/)/(2,1) ≊ P/2^{2} ≊ ; (6,4/)/(1,2)≊; (6,4/)/(3,1)≊;(6,4/)/(1,4)≊ P/(1,2/)≊ ≊ P/2^{4}≊P/($2^{/}$,2) ≊ ; (6,4/)/(2,2) ≊; (6,4/)/(6,1) ≊ P/6^{2} ≊ ; (6,4/)/(3,2) ≊ ; (6,4/)/(1,4/) ≊ ≊ P/(2,2/)≊P/(2,4) ≊ P/($2^{/}$,4) ≊	(4/,3); (6,2/); (4/,2); (6,2); (2/,3); (4/,1); (2/,2);

		(6^4,1/), (3,4/).	≊ P/(2^4,1/) ≊; (6,4/)/(6,2) ≊ ≊P/(6$^/$,2) ≊ P/(6^4) ≊ ; (6,4/)/(2,4/)≊; (6,4/)/(3,4) ≊ P/(3,2/) ≊; (6,4/)/(6,2/) ≊ P/(6,4) ≊ P/(6$^/$,4) ≊ ≊ P/(6^4,1/) ≊ P/(3,4/) ≊.	(3,2); (2/,1); (3,1); (2,2); (2,1).

62	(4/,3/)	(2,1),(1,3)(4,1),(2/,1),(1,3/),
		(2,3),(2$^/$,3),(4/,1),(4,3),(4$^/$,3),
		(2,3/), (2/,3), (2$^{//}$,3), (2$^/$/,3),
		(4,3/),(2/,3/),(4/,3),(4$^{//}$,3),
		(4$^/$/,3).
			(4/,3/)/(2,1) ≊ ; (4/,3/)/(1,3) ≊ ;
			(4/,3/)/(4,1) ≊ P/(2/,1) ≊ ;
			(4/,3/)/(1,3/) ≊ P/(2$^/$,3) ≊ ;
			(4/,3/)/(2,3) ≊ ; (4/,3/)/(4/,1) ≊;
			(4/,3/)/(4,3)≊ P/(2/,3)≊P/(2$^{//}$,3) ≊
			≊ P/(2$^/$/,3) ≊; (4/,3/)/(2,3/) ≊
			≊ P/(4$^/$,3) ≊ ; (4/, 3/)(4,3/) ≊
			≊ P/(2/,3/) ≊ P/(4/,3) ≊ P/(4$^{//}$,3) ≊
			≊ P/(4$^/$/,3) ≊.
				(3/,2/); (4/,2);
				(3/,2);
				(4/,1);
				(2/,2); (3/,1);
				
				(2,2);
				(2/,1);
				
				(2,1).

63	(6/,4)	(2,1), (1,2), 2^2, (3,1), (1,4), (2,2),2^4,(6,1),(3/,1),6^2,(3,2), (3,/^{2}),(2,4),(6/,1),(6,2),(3,4), (3/,2), (6/^{2}), (6^2/), (3/^{4}), 6^4, (6/,2), (3/,4), (6/^{4}), (6^4/).	(6/,4)/(2,1) ≊ ; (6/, 4)/(1,2) ≊ ; (6/,4)/2^2 ≊; (6/,4)/(3,1) ≊ ; (6/,4)/(1,4) ≊ ≊ P/2^4 ≊ ; (6/,4)/(2,2) ≊; (6/,4)/(6,1) ≊ P/(3/,1) ≊ P/(3,2) ≊ ≊ P/(3/^{2}) ≊ ; (6/,4)/6^2 ≊ ; (6/, 4)/(6/,1) ≊ P/(6/^{2}) ≊ P/(6^2/) ≊ ; (6/,4)/(3/,2) ≊ P/(3/^{4}) ≊ P/(6,2) ≊; (6/,4)/(3,4) ≊ P/6^4 ≊ ;(6/,4)/(2,4) ≊; (6/,4)/(6/,2) ≊ P/(3/,4) ≊ P/(6/^{4}) ≊ ≊ P/(6^4/) ≊.	(3/,4); (6/,2); ? (2/,4); (6/,1); (3/,2); (4,2); ?; (4,1); (2,2); (2/,1); (3/,1); (2,1).
64	(6/,2/)	(2,1), (1,2), (1,1/), 2^2,2$^/$, (3,1), (1,2/), (2,2), (2,1/), (2^2,1/), (2$^/$,2), (6,1), 6^2, 6$^/$, (3,2),(3,1/), (3/,1), (3/^{2}), (3/$^/$),(2,2/), (6/,1), (6,2), (6,1/), (3,2/), (3/,2),(3/,1/), (3/^{2},1/), (3/$^/$,2), (6/^{2}),(6/$^/$), (6^2/), (6$^/$/), (6^2/$^/$), (6$^/$/^{2}), (6^2,1/), (6$^/$,2), (6/,2), (6/,1/), (6,2/), (3/,2/), (6/,2), (6/^{2},1/), (6$^/$/,2), (6^2/,1/),	(6/,2/)/(2,1) ≊ ; (6/,2/)/(1,2) ≊ ≊ P/(1,1/) ≊ P/2$^/$ ≊ ; (6/,2/)/2^2 ≊ ; (6/, 2/)/(3,1) ≊ ; (6/,2/)/(1,2/) ≊ ≊ P/(2^2, 1/) ≊ P/(2$^/$,2) ≊ ; (6/,2/)/(2,2) ≊ P/(2,1/) ≊; (6/,2/)/(6,1)≊ P/(3/,1)≊ P/6$^/$≊ P/(3,2) ≊ ≊ P/(3,1/)≊ P/((3/^{2}) ≊ P/(3/$^/$) ≊ ; (6/,2/)/6^2 ≊ ; (6/, 2/)/(2,2/) ≊ ; (6/,2/)/(6/,1) ≊ P/(6/^{2}) ≊ P/(6/$^/$) ≊ ≊ P/(6^2/) ≊ P/(6$^/$/) ≊ P/(6^2/$^/$) ≊ ≊ P/(6$^/$/^{2}) ≊ P/(3,2/) ≊ ; (6/,2/)/(3/,2) ≊ ≊ P/(3/,1/) ≊ P/(3/^{2},1/) ≊ P/(3/$^/$,2) ≊ ≊ P/(6^2,1/) ≊ P/(6$^/$,2) ≊ P/(6,2) ≊ ≊ P/(6,1/) ≊ ; (6/,2/)/(6/,2) ≊ P/(6/,1/)≊ ≊ P/(6,2/) ≊ P/(3/,2/) ≊ P/(6/$^/$,2) ≊ ≊ P/(6/^{2}, 1/) ≊ P/(6$^/$/,2) ≊P/(6^2/,1/) ≊.	(3/,2/) ; (6/, 2); ?; (2/,2/); (6/,1); (3/,2); (2/,2); ?; (3/,1); (2/,1); (2,2); (2,1).
65	(6/^{4},1/)	(2,1),(1,2), 2^2, (3,1),(1,2/), (2,2), (2$^/$,2), (6,1), 6^2,(3,2), (2,2/), (6$^/$,2), (3,2/), (3/^{4}), (3/$^/$,2), (6/^{4}), (6,2/), (3/^{4},2), (6/$^/$,2).	(6/^{4},1/)/(2,1) ≊ P/2^2 ≊ ; (6/^{4},1/)/(1,2) ≊ ; (6/^{4},1/)/(3,1) ≊ ; (6/^{4},1/)/(1,2/) ≊ P/(2$^/$,2) ≊ ; (6/^{4},1/)/(2,2) ≊ ; (6/^{4},1/)/(6,1) ≊ ≊ P/6^2 ≊ ; (6/^{4},1/)/(3,2) ≊ ;	(4$^/$/,3); (6/,2);(4^2/,1/); (6/,1); (3/,2); (4$^/$/); (2/,2);
			(6/^{4},1/)/(2,2/) ≊ ; (6/^{4},1/)/(6/,2) ≊ ≊ P/(3,2/)≊ ; (6/^{4},1/)/(3/^{4}) ≊ ≊ P/(3/$^/$,2) ≊; (6/^{4},1/)/(6/^{4}) ≊ ≊ P/(6,2/) ≊ P/(3/^{4},2) ≊ P/(6/$^/$,2) ≊.	(3/,1); (2/,1); (2,2); (2,1).
66	(6^4/,1/)	(1,2), (3,1),(1,2/),2^4, (2$^/$,2), (3/,1),(3/^{2}), (3,2), 6^4,(3,2/),	(6^4/,1/)≊ /(1,2) ≊ ; (6^4/,1/)/(3,1) ≊; (6^4/,1/)/(1,2/) ≊ P/2^4 ≊ P/(2$^/$,2) ≊ ;	(6^2/,1/);(4^2/,1/); (3/,2);

		(3/,2),(3/′,2),(6′,2),(3/^{4}), (6^4/), (6^4,1/), (6^4/′), (6′/^{4}), (6′/,2), (3/^{4},1/), (3/,2/)	(6^4/,1/)/(3/,1) ≊ P/(3/^{2}) ≊; (6^4/,1/)/(3,2) ≊ ; (6^4/,1/)/6^4 ≊ ≊ P/(3,2/) ≊ P/(3/,2) ≊ P/(3/′,2) ≊. ≊P/(6′,2)≊P/(3/^{4})≊; (6^4/,1/)/(6^4/)≊ ≊ P/(6^4,1/) ≊ P/(6^4/′) ≊ P/(6′/^{4}) ≊ ≊ P/(6′/,2) ≊ P/(3/^{4},1/) ≊ P/(3/,2/)≊.	(4′/); (2^2/,1/); (2,2); (2,1).
67	(6′/,4)	(1,2),(3,1), (1,4),(2′,2),(3/,1), (3/^{2}),(3,2),(2′,4),(3,4),(3/,2), (3/′,2), (6′,2), (3/^{4}), (6′/,2), (3/,4),(3/′,4), (6′,4), (6′/^{4}).	(6′/,4)/(1,2) ≊ ; (6′/,4)/(3,1) ≊; (6′/,4)/(1,4)≊P/(2′,2)≊;(6′/,4)/(3/,1)≊ ≊ P/(3/^{2}) ≊; (6′/,4)/(3,2) ≊ ; (6′/,4)/(2′,4) ≊ ; (6′/,4)/(3,4) ≊ ≊ P/(6′,2) ≊ ; (6′/,4)/(3/^{4}) ≊ ≊ P/(3/,2) ≊ P/(3/′,2) ≊ ; (6′/,4)/((6′/,2) ≊ P/(3/,4) ≊ ≊ P/(3/′,4) ≊ P/(6′,4) ≊ P/(6′/^{4}) ≊.	(6′/,2); (4/,2); (3/,2); (4/,1); (2/,2); (3/,1); (2,2); (2/,1); (2,1).
68	(6/′,4)	(2,1), (1,2),2^2, (3,1),(1,4), (2,2),(6,1),(3,2),6^2,(2,4),(3,4), (6,2),(3/′,2),6^4, (6,4),(6/′,2), (3/′,4),(6^4/′).	(6/′,4)/(2,1)≊P/2^2≊; (6/′,4)/(1,2) ≊; (6/′,4)/(3,1) ≊ ;(6/′,4)/(1,4) ≊P/(2,2) ≊; (6/′,4)/(6,1) ≊ P/6^2≊; (6/′,4)/(3,2) ≊; (6/′,4)/(2,4) ≊ ; (6/′,4)/(3,4) ≊ ≊ P/(6,2) ≊ P/6^4≊; (6/′,4)/(3/′,2) ≊; (6/′,4)/(6,4) ≊ P/(6/′,2) ≊ P/(3/′,4) ≊ ≊ P/(6^4/′) ≊.	(4/′,3); (6/′,2); (4/′,2); (6/,1); (4/,1),(2/′,2); (3/,1); (2/,1); (2,2); (2,1).
69	(4/,4/)	(2,1),(1,2), 2^2,(4,1),(1,4), (2/,1),(1,2/),4^2,2^4,(2,2), (2/^{2}),(2′,2),(4/,1),(1,4/), (4,2),(2,4),(4/^{2}),(2′,4),(4^2/), (2^4,1/),(4′,2),(2/^{4}),(2/,2), (2,2/), (2/′,2), (4^4,2), (4/,2), (2,4/), (4,2/),(2/,4),(4,4), (2/,2/), (2/′,4),(4/′,2),(4^4/′,2), (2/^{4},1/), (4′/,2), (4/^{4}), (4′,4), (4/,4),(4,4/), (4/,2/),(2/,4/), (4/′,4), (4′/,4),(4/^{4},1/).	(4/,4/)/(2,1)≊P/(1,2) ≊ ; (4/,4/)/2^2≊; (4/,4/)/(4,1) ≊ P/(1,4) ≊ P/(2/,1) ≊ ≊P/(1,2/)≊;(4/,4/)/(2/^{2}) ≊ P/(2′,2) ≊; (4/,4/)/4^2≊ P/2^4≊ ; (4/,4/)/(4/,1) ≊ ≊ P/(1,4/) ≊ P/(4/^{2}) ≊ P/(2′,4) ≊ ≊ P/(4^2/)≊ P/(2^4,1/)≊;(4/,4/)/(4,2) ≊ ≊ P/(2,4) ≊ P/(2/,2) ≊ P/(2,2/) ≊ ≊ P/(2/′,2) ≊ ; (4/,4/)/(2,2)≊; ≊(4/,4/)/(4^4,2)≊ P/(4′,2) ≊ P/(2/^{4}) ≊; (4/,4/)/(4/,2) ≊ P/(2,4/) ≊ ≊ P/(4^4/′,2) ≊ P/(4/^{4}) ≊ P/(4′,4) ≊ ; (4/,4/)/(4,2/) ≊ P/(2/,4) ≊ P/(2/,2/)≊ ≊ P/(4,4) ≊ P/(2/′,4) ≊ P/(4/′,2) ≊ ≊ P/(2/^{4},1/) ≊ P/(4′/,2) ≊ ; (4/,4/)/(4/,4) ≊ P/(4,4/) ≊ ≊ P/(4/,2/) ≊ P/(2/,4/) ≊ ≊P/(4/′,4)≊P/(4′/,4)≊P/(4/^{4},1/)≊ .	(4/,2/); ?; (4/,2);(4/′,2); ?; (4/,1); (2/,2) ; (2/,2/); ? ; (2/,1); (2,2); (2,1).
70	(6/,6)	(2,1),(1,2),2^2,(3,1),(1,3),(2,2), (6,1), (1,6), (3,2),(2,3),(3/,1), (3/^{2}),6^2, (2^2,3), (3,3),(6/,1), (6,2),(2,6),(6/^{2}),(6^2/), (3/,2), (6,3),(3,6),(3/,3), (6/,2), (3/,6), (6/,3),(6/^{2},3), (6^2/,3).	(6/,6)/(2,1) ≊ ; (6/,6)/(1,2) ≊ ; (6/,6)/2^2 ≊ ; (6/,6)/(3,1) ≊ ; (6/,6)/(1,3) ≊ ; (6/,6)/(2,2) ≊; (6/,6)/(6,1) ≊ P/(3/,1) ≊ P/(3/^{2}) ≊; (6/,6)/(1,6) ≊ P/6^2 ≊ P/(2^2,3) ≊; (6/,6)/(3,2) ≊ ; (6/,6)/(2,3) ≊ ; (6/,6)/(3,3) ≊ ; (6/,6)/(6/,1) ≊ P/(6/^{2}) ≊ P/(6,2) ≊ ≊ P/(6^2/) ≊ P/(3/,2) ≊; (6/,6)/(2,6) ≊ ; (6/,6)/(6,3) ≊ ≊ P/(3/,3) ≊ ; (6/,6)/(3,6) ≊; (6/,6)/(6/,2) ≊; (6/,6)/(3/,6) ≊ ≊ P/(6/,3) ≊ P/(6/^{2},3) ≊ P/(6^2/,3) ≊.	(6,3/), (6/,3); ?; (6,2/); (6/,2);(3/,3); (6,2); (6/,1); (2/,3); (3/,2); (2/,2); (6,1); (3/,1); (2,2); (2/,1); (3,1); (2,1).
71	(6/,3/)	(2,1),(3,1),(1,3),(6,1),(3/,1), (1,3/),(2,3),(3,3),(2′,3),(6/,1),	(6/,3/)/(2,1) ≊ ; (6/,3/)/(3,1) ≊ (6/,3/)/(1,3) ≊ ; (6/,3/)/(6,1) ≊	(3/,3/); (3/,2/); (6/,2);

		(2,3/), (3,3/),(6,3),(6$^{/}$,3), (3/,3), (3/$^{/}$,3),(6,3/),(3/,3/), (6/,3), (6/$^{/}$,3), (6$^{/}$/,3).	≊P/(3/,1)≊ P/(2,3) ≊; (6/,3/)/(1,3/)≊ ≊ P/(2$^{/}$,3) ≊; (6/,3/)/(3,3) ≊; (6/,3/)/(2,3/) ≊ P/(6/,1) ≊; (6/,3/)/(3,3/) ≊ P/(6$^{/}$,3) ≊; (6/,3/)/(6,3) ≊ P/(3/,3) ≊ P/(3/$^{/}$,3) ≊; (6/,3/)/(6,3/)≊ P/(3/,3/) ≊ P/(6/,3) ≊ ≊ P/(6/$^{/}$,3) ≊ P/(6$^{/}$/,3) ≊.	(3/,2); (6/,1); (2/,2); (3/,1); (2/,1); (2,2); (2,1).
72	(6^{2}/,3/)	2^{2},(3,1),(1,3),6^{2},(3/,1),(3/^{2},1), (1,3/),(2$^{/}$,3),(2^{2},3),(3,3), (6^{2}/), (2^{2},3/),(3,3/),(6^{2},3),(6$^{/}$,3),(3/,3), (3/^{2},3),(3/$^{/}$,3),(3/$^{2/}$,3),(6^{2},3/), (6^{2}/,3),(6^{2}/$^{/}$,3),(6$^{/}$/,3),(3/,3/), (3/^{2},3/).	(6^{2}/,3/)/2^{2}≊;(6^{2}/,3/)/(3,1) ≊P/(1,3) ≊; (6^{2}/,3/)/6^{2}≊P/(2^{2},3)≊P/(3/,1)≊P/(1,3/)≊ ≊ P/(3/^{2},1) ≊ P/(2$^{/}$,3) ≊; (6^{2}/,3/)/(3,3) ≊ ; (6^{2}/,3/)/(6^{2}/)≊ ≊ P/(2^{2},3/) ≊ ; (6^{2}/,3/)/(3,3/) ≊ ≊ P/(6^{2},3) ≊ P/((3/,3) ≊ P/(3/$^{/}$,3) ≊ ≊ P/(3/$^{2/}$,3) ≊ ; (6^{2}/, 3/)/(6$^{/}$,3) ≊ ≊ P/(3/^{2},3) ≊ ; (6^{2}/,3/) /(6^{2},3/) ≊ ≊ P/(6^{2}/,3) ≊ P/(6^{2}/$^{/}$,3) ≊ P/(6$^{/}$/,3) ≊ ≊ P/(3/,3/) ≊ P/(3/^{2},3/) ≊.	(3/,3/); (6^{2}/,1/); (3/,2) ; (2^{2}/,1/); (3/,1); (2,2); (2/,1); (2,1).
73	(6/$^{/}$,6)	(2,1),(1,2), 2^{2},(3,1),(1,3), 3^{3},3^{-3}, (2,2),(6,1),(1,6), (3,2),(2,3),6^{2},(2^{2},3),6^{3}, 6^{-3}, 6$^{(6}$,6^{-6}, (3,3), (6,2), (2,6), (6^{3},2), (6^{-3},2),(6,3), (3,6), (6^{2},3),(3/$^{/}$,3),(6,6), (6/$^{/}$,3),(3/$^{/}$,6).	(6/$^{/}$,6)/(2,1)≊ P/(1,2) ≊ ; (6/$^{/}$,6)/2^{2}≊; (6/$^{/}$,6)/(3,1)≊P/(1,3) ≊ P/3^{3}≊P/3^{-3}≊; (6/$^{/}$,6)/(2,2)≊;(6/$^{/}$,6)/(6,1)≊P/(1,6) ≊ ≊P/(3,2)≊P/(2,3)≊ P/6^{2} ≊ P/(2^{2},3) ≊ ≊ P/6^{3} ≊ P/6^{-3} ≊ P/6^{6} ≊ P/6^{-6} ≊; (6/$^{/}$,6)/(3,3) ≊ ; (6/$^{/}$,6)/(6,2) ≊ ≊ P/(2,6) ≊ P/(6^{3},2) ≊ P/(6^{-3},2) ≊; (6/$^{/}$,6)/(6,3) ≊ P/(3,6) ≊ P/(3/$^{/}$,3) ≊; (6/$^{/}$,6)/(6^{2},3) ≊; (6/$^{/}$,6)/(6,6) ≊ ≊ P/(6/$^{/}$,3) ≊ P/(3/$^{/}$,6) ≊.	(6/$^{/}$,3); ?; (6/$^{/}$,2); (3/$^{/}$,3); (6/,1); (2/$^{/}$,2); (3/,1), (2,2); (2/,1); (2,1).
74	(6/,4/)	(2,1),(1,2),2^{2},(3,1),(1,4), (2,2), 2^{4},(1,2/), (2$^{/}$,2), (6,1), (3/,1),6^{2},(3,2),(3/^{2}), (1,4/), (2,4),(2,2/),(2$^{/}$,4),(2^{4},1/), (6/,1),(6/^{2}),(6,2),(3,4),(3/,2), (3,2/), (3/$^{/}$,2), (6$^{/}$,2), (6^{2}/), (3/^{4}), 6^{4}, (6/,2), (6,4), (6,2/),(3,4/), (3/,4), (3/,2/),(3/$^{/}$,4),(6/$^{/}$,2), (6^{4}/$^{/}$),(6$^{/}$,4), (3/^{4},1/), (6/^{4}), (6$^{/}$/,2), (6/,4), (6,4/), (6/,2/), (3/,4/), (6/$^{/}$,4), (6$^{/}$/,4), (6/^{4},1/), (6^{4}/,1/).	(6/,4/)/(2,1) ≊; (6/,4/)/(1,2) ≊; (6/,4/)/2^{2} ≊ ; (6/,4/)/(3,1) ≊; (6/,4/)/(1,4) ≊ P/(1,2/)≊P/(2$^{/}$,2) ≊; (6/,4/)/(2,2) ≊ ; (6/,4/)/2^{4} ≊ ; (6/,4/)/(6,1) ≊ P/(3/,1) ≊ P/(3/^{2}) ≊; (6/,4/)/(3,2) ≊ ; (6/,4/)/6^{2} ≊ ; (6/,4/)/(1,4/) ≊ P/(2$^{/}$,4) ≊ P/(2^{4},1/) ≊; (6/,4/)/(2,4) ≊ P/(2,2/) ≊; (6/,4/)/(6/,1) ≊ P/(6/^{2}) ≊ P/(6^{2}/)≊; (6/,4/)/(6,2) ≊ P/(3,4) ≊ P/(3/,2) ≊ ≊ P/(3,2/) ≊ P/(3/$^{/}$,2) ≊ P/(3/^{4}) ≊ ≊ P/6^{4} ≊ ; (6/,4/)/(6$^{/}$,2) ≊ ; (6/,4/)/(6/,2) ≊ P/(3,4/) ≊ P/(6/$^{/}$,2) ≊ ≊P/(6^{4}/$^{/}$)≊P/(6$^{/}$,4)≊P/(6/^{4})≊P/(6$^{/}$/,2)≊; (6/,4/)/(3/,4)≊P/(3/,2/) ≊ P/(3/$^{/}$,4) ≊ ≊ P/(3/^{4},1/)≊P/(6,4) ≊ P/(6,2/) ≊; (6/,4/)/(6/,4) ≊ P/(6/,2/) ≊P/(6,4/)≊ ≊ P/(3/,4/) ≊ P/(6/$^{/}$,4) ≊ P/(6$^{/}$/,4) ≊ ≊ P/(6/^{4},1/) ≊ P/(6^{4}/,1/)≊.	(4/,3/);(6/,2/); ?; (4/,2/); (6/,2); (3/,2/); ? (4/,2); (2/,2/); ? (6/,1); (3/,2); (4/,1); (2/,2); ? (2/,1); (2,2); (2,1).
75	(6/,6/)	(2,1), (1,2), 2^{2}, (3,1),(1,3), (2,2), (6,1), (3/,1), (1,6), (1,3/), 6^{2}, (2^{2},3), (3,2), (2,3), (3/^{2}), (2$^{/}$,3), (3,3), (6/,1), (6/^{2}), (1,6/), (2$^{/}$,6), (6,2), (2,6),(3/,2), (2,3/), (6^{2}/), (2^{2},3/), (6,3), (3/,3),	(6/,6/)/(2,1)≊P/(1,2) ≊ ; (6/,6/)/2^{2}≊; (6/,6/)/(3,1)≊P/(1,3)≊;(6/,6/)/(2,2)≊; (6/,6/)/(6,1) ≊ P/(1,6)≊P/(3/,1) ≊ P/(1,3/)≊ ≊ P/(3/^{2}) ≊ P/(2$^{/}$,3)≊; (6/,6/)/(3,2) ≊ ≊ P/(2,3) ≊; (6/,6/)/6^{2} ≊ P/(2^{2},3) ≊; (6/,6/)/(6/,1) ≊ P/(1,6/) ≊ P/(6/^{2}) ≊ ≊ P/(2$^{/}$,6) ≊ P/(6^{2}/) ≊ P/(2^{2},3/) ≊;	(6/,3/), ?; (6/,2/);(3/,3/); (6/,2); (3/,2/); ?; (6/,1);

		$(3,6),(3,3/),(3/^{/},3),(3/^{2},3),$ $(6^{/},3),(6/,2),(2,6/),$ $(6/,3),(3/,6),(3,6/),$ $(6,3/),(3/,3/),(6,6),$ $(6/^{/},3),(3/^{/},6),(6^{2}/,3),$ $(6^{2},3/),(6^{/}/,3),(3/^{2},3/),$ $(6^{/}/^{2},3),(6^{2}/^{/},3),(6/,6),$ $(6,6/),(6/,3/),(3/,6/),$ $(6/^{/},6),(6^{/}/,6),$ $(6/^{2},3/),(6^{2}/,3/).$	$(6/,6/)/(6,2) \approxeq P/(2,6) \approxeq P/(3/,2) \approxeq$ $\approxeq P/(2,3/)\approxeq;\ (6/,6/)/(6,3) \approxeq P/(3,6) \approxeq$ $\approxeq P/(3/,3) \approxeq P/(3,3/) \approxeq P/(3/^{/},3) \approxeq;$ $(6/,6/)/(3/^{2},3) \approxeq P/(6^{/},3) \approxeq;$ $(6/,6/)/(6/,2) \approxeq P/(2,6/) \approxeq;$ $(6/,6/)/(6/,3) \approxeq P/(3,6/) \approxeq P/(6^{2}/,3) \approxeq$ $\approxeq P/(6^{2},3/) \approxeq P/(6^{/}/,3) \approxeq P/(3/^{2},3/) \approxeq$ $\approxeq P/(6^{/}/^{2},3) \approxeq P/(6^{2}/^{/},3) \approxeq;$ $(6/,6/)/(3/,3/) \approxeq P/(6,6) \approxeq P/(6,3/) \approxeq$ $\approxeq P/(3/,6) \approxeq P/(6/^{/},3) \approxeq P/(3/^{/},6) \approxeq;$ $(6/,6/)/(3,3) \approxeq;\ (6/,6/)/(6/,6) \approxeq$ $\approxeq P/(6,6/) \approxeq P/(6/,3/) \approxeq P/(3/,6/) \approxeq$ $P/(6/^{/},6) \approxeq P/(6^{/}/,6) \approxeq P/(6/^{2},3/) \approxeq$ $\approxeq P/(6^{2}/,3/) \approxeq.$	 (3/,2); (2/,2); ? (3/,1); (2/,1); (2,2); (2/,2/); (2,1).

5. Поисками классов изоморфизма, представленных в [1], по которым распределяются все 263 различных бирозеточных P-симметрии, выявлением нетривиальных нормальных делителей Q для каждой из 75 неизоморфных между собой бирозеточных P-симметрий, выписанных в таблице настоящей работы, составлением фактор-групп P/Q для каждой взятой группы и указанием P-симметрии, которой сильно изоморфны выявленные фактор-группы P/Q, завершился поиск метода существенного сокращения обзора полного подсчета r-мерных групп G_r^P бирозеточных P-симметрий. Применим этот метод для независимой проверки выявленных в [1] с помощью таблеточных групп G_{310}^P розеточных P-симметрий 1283-х пятимерных групп категории G_{5310}. Эти же пятимерные группы отмеченной категории можно получить, согласно [1], с помощью одномерных точечных групп G_{10}^P 252 различных между собой без учета энантиоморфизма бирозеточных P-симметрий, содержащихся в неизоморфных классах работы [1] , по которым распределяются все 263 бирозеточные P-симметрии.

Действительно, обобщая группы симметрии 1 и m категории G_{10} с отмеченными 252 бирозеточными P-симметриями, получим 2 порождающие группы 1 и m (или (1,1)-старшие группы), 502 (=2×251) старшие, так как по отдельности группы 1 и m порождают по одной такой группе при обобщении их с каждой нетривиальной бирозеточной P-симметрией, 8 младших групп, ибо группа m порождает одну младшую группу $m^{(2,1)}$ при обобщении её с (2,1) – симметрией, а класс изоморфизма 2) работы [1], к которому относится симметрия (2,1), содержит 8 различных бирозеточных P–симметрий. При обобщении групп 1 и m с остальными бирозеточными P-симметриями, представленными во второй графе таблицы настоящей работы под номерами 4) – 75), группа m будет порождать по одной Q-средней группе при каждом нормальном делителе Q группы P, задающей рассматриваемую P-симметрию, при котором фактор-группа P/Q сильно изоморфна группе (2,1), при обобщении с которой группа m порождает одну младшую группу $m^{(2,1)}$.Следовательно, при обобщении групп 1 и m с (4,1)-симметрией получим одну (2,1)-среднюю группу $m^{(4,1)}$, так как фактор-группа $(4,1)/(2,1) \approxeq (2,1)$. Но симметрия (4,1) входит в класс изоморфизма 4), содержащий семь различных без учета энантиоморфизма бирозеточных Р-симметрий, поэтому при обобщении групп 1 и m со всеми семью P-симметриями класса изоморфизма 4) из работы [1] , получим семь Q-средних групп категории G_{10}^P . В свою очередь, при обобщении групп 1 и m с (2,2)-симметрией получим, что группа m порождает три (2,1)-, (1,2)- и 2^2-средние группы, так как фактор-группы $(2,2)/(2,1) \approxeq P/(1,2) \approxeq P/2^2 \approxeq (2,1)$. Но (2,2)-симметрия входит в класс изоморфизма 5) работы [1], содержащий 9 различных бирозеточных P-симметрий. Следовательно, при обобщении групп 1 и m со всеми 9 группами класса изоморфизма 5), группа m порождает 27 (=3×9) Q-средних групп категории G_{10}^P .

Выполнить подобные исследования для всех остальных P-симметрий, приведенных в таблице настоящей работы, сообразно количеству различных без учета энантиоморфизма бирозеточных P-симметрий в классах изоморфизма работы [1], которым принадлежат рассматриваемые P-симметрии из таблицы настоящей работы, получим все Q-средние группы, порождаемые группой m при её обобщении со всеми бирозеточными группами оставшихся классов изоморфизма работы [1].

Суммирование всех полученных при этом групп G_{10}^{P} бирозеточных P-симметрий, как можно убедиться в этом, даёт число 1283, из которых 2 порождающих, 502 старших, 8 младших и 771 Q-средних, для которых $P/Q \approxeq (2,1)$. Этими 1283 группами G_{10}^{P} 252 различных без учета энантиоморфизма бирозеточных P-симметрий моделируются 1283 группы симметрии категории G_{5310}.

Таким образом, 1283 группы симметрии категории G_{5310} получены нами двумя независимыми методами – с помощью таблеточных групп G_{310}^{P} розеточных P-симметрий и с помощью одномерных точечных групп G_{10}^{P} различных без учета энантиоморфизма бирозеточных P-симметрий. Совпадение осуществленных расчетов одной и той же категории G_{5310} пятимерных групп симметрии говорит о верности предложенного нами нового способа выявления количества многомерных групп симметрии, моделируемых классическими группами симметрии и их расширениями с помощью бирозеточных P-симметрий.

Если при обобщении r-мерных групп симметрии G_{r} с бирозеточными P-симметриями при $P \simeq G_{420}$ встречаются такие Q-средние группы, для которых фактор-группа P/Q изоморфна группе, не содержащейся в множестве рассматриваемых 263 бирозеточных P-симметрий (в этом случае на её месте в 5 графе таблицы стоит знак ?), то для таких категорий групп G_{r}^{P} бирозеточных P-симметрий предложенный нами метод сокращенного обзора полного вывода групп бирозеточных P-симметрий не применяется.

Литература:

1. Палистрант Александр. Бирозеточные P-симметрии, их свойства и геометрические приложения // STUDIA UNIVERSITATIS. Revista Ştiinţifică. Seria: Ştiinţe exacte şi economice (Matematică, Informatică, Economie): №7(27). - Chişinău: Universitatea de Stat din Moldova, 2009, p.12.
2. Заморзаев А.М. О сильном изоморфизме групп и изоморфизме P-симметрий // Известия АН РМ. Математика. 1994, №1, с.75-84.
3. Заморзаев А.М., Палистрант А.Ф. Трехмерные точечные группы гиперкристаллографических P-симметрий и некоторые их приложения // Кристаллография, 1999, т.44, №6, с.976-979.
4. Палистрант А.Ф., Заморзаев А.М. Трехмерные точечные группы гиперкристаллографических P-симметрий второго порядка и их многомерные приложения // Кристаллография, 2000, т.45, №1, с.7-11.
5. Палистрант А.Ф. О группах розеточных, таблеточных и гипертаблеточных P-симметрий и их связях с группами многомерных симметрий // Кристаллография, 2000, т.45, №6, с.967-973.
6. Заморзаев А.М., Галярский Э.И., Палистрант А.Ф. Цветная симметрия, её обобщения и приложения. - Кишинев: Штиинца, 1978. - 275 с.
7. Заморзаев А.М. Теория простой и кратной антисимметрии. - Кишинев: Штиинца, 1976. - 283 с.

Prezentat la 29.01.2010