ASUPRA PROPRIETĂȚILOR GRUPURILOR PSEUDOMINORE DE W_p-SIMETRIE

Marina BRANIŞTE, Alexandru LUNGU

Catedra Algebră şi Geometrie

In the present paper there are studied, analyzed and described some properties of pseudo-minor groups of W_p-symmetry: the general structure, the necessary and sufficient conditions for a certain group of a generalized symmetry in order to be pseudo-minor, one method of deriving.

1. Problema cercetării structurii generale şi a proprietăților grupurilor pseudominore de W_p-simetrie este mai complexă şi mai dificilă decât problema analogică pentru grupurile pseudominore de $\overline{P}$-simetrie sau a altor tipuri de grupuri chiar de W_p-simetrie.

Scopul cercetării acestei probleme este: în primul rând, de a determina condițiile necesare şi suficiente ca un grup oarecare de o simetrie generalizată să fie pseudominor de W_p-simetrie cu grupul generator dat; în al doilea rând, de a evidenția diferite tipuri de subgrupuri ale lor din punctul de vedere al nivelului de generalizare a simetriei clasice; în al treilea rând, de a elabora metode cât mai simple de deducere a acestor grupuri din grupul generator dat şi grupul inițial de substituții în calitate de grup de definire.

2. Vom aminti, mai întâi, pe scurt unele aspecte ale teoriei generale a grupurilor discrete de W_p-simetrie [1-7]. Fie M_1 un punct de poziție generală al figurii geometrice F cu grupul de simetrie G. Acționând cu grupul G asupra punctului M_1, se obține un sistem de puncte G-echivalente, i.d. $g_k(M_1) = M_k \in F$, unde $g_k \in G$. Se dă mulțimea ordonată $N = \{1, 2, ..., m\}$ de „indici", care reprezintă m calități de aceeaşi natură generală cu caracter scalar (faze ale aceluiaşi fenomen, temperatură, presiune, densitate, masă ş.a.). Fixăm grupul tranzitiv de substituții P al acestor „indici". Fiecărui punct al figurii F i se atribuie cel puțin unul din „indicii" mulțimii N. În rezultat, se obține figura „indexată" $F^{(N)}$. Construim produsul Cartezian W al copiilor izomorfe cu P, indexate sus în dreapta cu elementele grupului G, adică $W = P^{g_1} \times P^{g_2} \times ... \times P^{g_n} \times ...$.

Se numeşte transformare de W_p-simetrie aşa o aplicație izometrică $g^{(w)} = gw$ a figurii „indexate" $F^{(N)}$ pe sine, în care transformarea de simetrie g acționează numai asupra punctelor $M_k = g_k(M_1)$ ale figurii $F^{(N)}$, iar „indicii", atribuiți punctelor M_k, se transformă de către substituția p^{g_k} („g_k-componentă" în w din W).

Mulțimea $G^{(W_p)}$ a tuturor transformărilor de W_p-simetrie ale oricărei figuri „indexate" $F^{(N)}$ formează un grup cu legea de compoziție

$$g_i^{(w_i)} * g_j^{(w_j)} = g_k^{(w_k)}, \tag{1}$$

unde $g_k = g_i g_j$, $w_k = w_i^{g_j} w_j$, iar $w_i^{g_j}(g_k) = w_i(g_j g_k)$. Fie $G^{(W_p)}$ – un grup de W_p-simetrie. Vom nota prin W' mulțimea tuturor componentelor w din $g^{(w)} \in G^{(W_p)}$. W' verifică condiția $w_0 \subseteq W' \subseteq W$, unde w_0 este unitatea grupului W. $H = G^{(W_p)} \bigcap G$ serveşte drept subgrup de simetrie clasică, iar $V = G^{(W_p)} \bigcap W' = G^{(W_p)} \bigcap W$ este subgrupul transformărilor W-identice ale grupului $G^{(W_p)}$. Vom numi grupul G grup generator pentru $G^{(W_p)}$, iar mulțimea tuturor grupurilor de W_p-simetrie cu acelaşi grup generator – familie. Vom numi grupul $G^{(W_p)}$ major, minor, mijlociu (V-mijlociu), semimajor, (W'-semimajor), semiminor (W'-semiminor), semimijlociu ((W',V)-semimijlociu), pseudominor (W'-pseudominor) sau pseudomijlociu ((W',V)-pseudomijlociu) dacă, respectiv, $w_0 < V = W' = W$, $w_0 = V < W' = W$, $w_0 < V < W' = W$, $w_0 < V = W' < W$, $w_0 = V < W' < W$, $w_0 < V < W' < W$, $w_0 = V \subset W' \subset W$ (dar W' nu este subgrup în W) sau $w_0 < V \subset W' \subset W$ (dar W' nu este subgrup în W).

Dacă subgrupul V de transformări W-identice ale grupului $G^{(W_p)}$ este unitar, atunci omomorfismul φ cu nucleul V al grupului $G^{(W_p)}$ pe grupul său generator G, conform regulii $\varphi(g^{(w)}) = g$, e pur şi simplu un izomorfism. În consecință, grupurile minore, semiminore şi pseudominore de W_p-simetrie sunt izomorfe cu grupurile lor generatoare.

Pentru a obține o generalizare netrivială a simetriei clasice, trebuie ca grupul respectiv de substituții P să verifice condiția $|P| \geq 2$. În consecință, $|W| = |P^G| \geq 2^{|G|} > |G|$. Grupurile minore de W_p-simetrie, dacă ele există, trebuie să verifice condiția $|W| \leq |G|$. Ultima relație e incompatibilă cu cerința $|W| > |G|$. Deci, grupuri minore de W_p-simetrie, pur şi simplu, nu există.

Grupurile $G^{(W_p)}$ de W_p-simetrie ale unor figuri „indexate" $F^{(N)}$ sunt subgrupuri în împletirile de stânga carteziene standarde ale grupului tranzitiv de substituții P cu grupul de operatori G şi au ca bază geometrică grupul discret de simetrie G al figurii F considerate inițial: $G^{(W_p)} \leq \bar{G}\,\overline{\int}\,P$, unde automorfismele $\bar{g}$ ce participă în înmulțirea elementelor din $G^{(W_p)}$ sunt generate de g – deplasări la stânga ale componentelor în interiorul elementelor w din grupul $W = P^{g_1} \times P^{g_2} \times \ldots \times P^{g_n} \times \ldots$. Înseşi figurile „indexate" $F^{(N)}$, care modelează grupurile respective de W_p-simetrie, sunt submulțimi ale produsului cartezian al mulțimilor F şi N cu suportul geometric F (mulțimea punctelor M ca componente în punctele „indexate" (M,r) ale figurii $F^{(N)}$).

Fie că se dau grupurile G şi P, de asemenea, şi omomorfismul $\varphi: G \to AutP$ cu legea $\varphi(g) = \bar{\varphi}_g$ şi cu nucleul $Ker\varphi = H$. Aplicația μ a grupului G în grupul P (i.d. pe submulțimea P' din P), conform regulii $\mu(g) = p$, se numeşte cvasiomomorfism de stânga, dacă pentru orice g_i şi g_j din G $\mu(g_k) = \mu(g_i g_j) = \bar{\varphi}_{g_j}[\mu(g_i)]\mu(g_j) = \bar{\varphi}_{g_j}(p_i)p_j = p_k$. φ se numeşte omomorfism însoțitor al aplicației μ [5].

În continuare vom formula câteva proprietăți ale aplicației cvasiomomorfe de stânga.

1) Dacă nucleul H al omomorfismului însoțitor $\varphi: G \to AutP$ coincide cu întreg grupul G, atunci cvasiomomorfismul de stânga μ al grupului G în grupul P degenerează în omomorfism obişnuit.

2) La cvasiomomorfismul de stânga μ al grupului G în grupul P imaginea unității 1 din G este unitatea e a grupului P: $\mu(1) = e$.

3) Nucleul cvasiomomorfismului de stânga μ al grupului G în grupul P este un subgrup H' din G: $H' < G$.

4) La cvasiomomorfismul de stânga μ al grupului G în grupul P cu nucleul H', fiecărei clase de resturi de dreapta a grupului G în raport cu subgrupul H' i se pune în corespondență unul şi numai unul din elementele grupului P, iar claselor diferite – elemente diferite din P.

5) Dacă grupul G la cvasiomomorfismul de stânga μ se aplică pe submulțimea P' a grupului P, atunci P' nu întotdeauna este grup.

6) Dacă H' reprezintă nucleul cvasiomomorfismului de stânga μ al grupului G pe submulțimea P' din P, atunci indicele subgrupului H' în G coincide cu puterea submulțimii $P' = \mathrm{Im}\psi$.

7) Dacă nucleul H' al cvasiomomorfismului de stânga μ al grupului G în grupul P este divizor normal în G, atunci elementelor $h \in H'$ le corespund, în conformitate cu omomorfismul însoțitor $\varphi : G \to AutP$, numai astfel de automorfisme $\bar{\varphi}_h$, a căror acțiune asupra $\mu(G) = P'$ coincide cu acțiunea automorfismului identic $\bar{i}$ al grupului P.

Dacă cvasiomomorfismul de stânga este însoțit de un izomorfism φ (i.d. $Ker\varphi = 1$), atunci el se numeşte cvasiomomorfism de stânga natural. Cvasiomomorfismul de stânga natural μ al grupului G în grupul $W = \overline{\Pi}_{g_i \in G} P^{g_i}$, la care automorfismul $\bar{\varphi}_g = \bar{g}$ acționează asupra elementelor w din $\mu(G)$ sub formă de g-deplasări la stânga ale componentelor (i.d. $\bar{g}(w) = \bar{g}(< p^{g_1}, p^{g_2}, ..., p^{g_k}, ... >) =< p^{gg_1}, p^{gg_2}, ..., p^{gg_k}, ... >$) se numeşte cvasiomomorfism de stânga natural exact.

Pentru ca aplicația μ a grupului G pe W' (unde W' este o submulțime cu unitate din grupul W), conform regulii $\mu(g_i) = w_i$, să fie un cvasiomomorfism de stânga natural exact, este necesar şi suficient ca produsul elementelor $\bar{g}_j(w_i)$ şi w_j să aparțină lui W' pentru orice element g_j din grupul G şi $\mu(g_j) = w_j$ din W'. Mai mult, pentru ca cvasiomomorfismul de stânga natural exact μ cu nucleul $Ker\mu = H$ al grupului G pe subgrupul W' din grupul W să coincidă cu omomorfismul obişnuit, este necesar şi suficient ca $W' \le DiagW$ şi $G/H \cong W'$.

3. În acest subpunct vom analiza structura generală a grupurilor W'-pseudominore şi vom evidenția un criteriu al grupurilor de acest tip.

Teorema 1: În orice grup W'-pseudominor de W_p-simetrie $G^{(W_p)}$ cu grupul generator G şi subgrupul de simetrie H se conține în calitate de subgrup un grup de P-simetrie [8] $G_1^{(W_1)}$ (definit de acelaşi grup inițial de substituții P, unde $W_1 \le DiagW \cong P$ şi $W_1 \subset W'$) al familiei cu grupul generator G_1 şi cu subgrupul de simetrie H (unde $H \trianglelefteq G_1 < G$).

Demonstrație: Fie $G^{(W_p)}$ un grup W'-pseudominor de W_p-simetrie, ce are grupul generator G, grupul inițial de definire P şi subgrupul de simetrie H. Atunci, $W = \overline{\Pi}_{g_i \in G} P^{g_i}$ şi $W' = \left\{ w \middle| g^{(w)} \in G^{(W_p)} \right\} \subset W$, iar $W' \not< W$. Notăm prin W_1 intersecția submulțimii W' cu subgrupul $DiagW = W''$: $W_1 = W' \cap W''$, iar prin simbolul $G_1^{(W_1)}$ – mulțimea elementelor $g^{(w)}$ din $G^{(W_p)}$, unde componenta $w \in W_1$.

Nemijlocit se verifică că $G_1^{(W_1)}$ reprezintă un grup cu înmulțirea pe componente, care, conform aparatului matematic formal, nu se deosebeşte de grupurile de P-simetrie. G_1 şi W_1 sunt grupuri, ca imagini omomorfe ale grupului $G_1^{(W_1)}$ la acțiunea omomorfismelor $\lambda : G_1^{(W_1)} \to G_1$ conform legii $\lambda\left[g^{(w)}\right] = g$ şi, respectiv, $\chi : G_1^{(W_1)} \to W_1$ conform legii $\chi\left[g^{(w)}\right] = w$. Evident, subgrupul de simetrie H al grupului $G^{(W_p)}$ reprezintă şi subgrup de simetrie în $G_1^{(W_1)}$, deoarece $w_0 \in W_1$. Mai mult decât atât, din izomorfismul grupurilor $G^{(W_p)}$ şi G rezultă izomorfismul grupurilor $G_1^{(W_1)}$ şi G_1. De asemenea, este evident că $H \trianglelefteq G_1 < G$ (rezultă din faptul că $G_1^{(W_1)}$ este grup de W_p-simetrie, ce nu se deosebeşte conform aparatului matematic de grupul de P-simetrie, şi, respectiv, din teoria generală a P-simetriei, deoarece $G_1 / H \cong W_1$). Teorema este demonstrată.

Teorema 2: Pentru ca $G^{(W_p)}$ să fie grup W'-pseudominor de W_p-simetrie cu grupul generator G şi grupul iniţial de definire P, este necesar şi suficient ca el să verifice următoarele condiţii:

1) $G^{(W_p)}$ să fie subgrup netrivial al grupului major $\tilde{G}^{(W_p)}$ ale aceleiaşi familii, adică: $G^{(W_p)} < \tilde{G}^{(W_p)} = \bar{G} \int P$;
2) în $G^{(W_p)}$ acționează regula de înmulțire a elementelor $g_i w_i \circ g_j w_j = g_i g_j w_i^{g_j} w_j$, unde $w_i =< p_i^{g_1}, p_i^{g_2}, ..., p_i^{g_n}, ... >$ şi $w_i^{g_j} =< p_i^{g_j g_1}, p_i^{g_j g_2}, ..., p_i^{g_j g_n}, ... >$;
3) $G^{(W_p)}$ constă din aşa transformări $g^{(w)} = gw$, ale căror componente g şi w formează, respectiv, grupul generator G şi submulțimea W' cu unitate a grupului $W = P^{g_1} \times P^{g_2} \times ... \times P^{g_n} \times ...$, adică $G = \left\{ g \middle| g^{(w)} \in G^{(W_p)} \right\}$ şi $W' = \left\{ w \middle| g^{(w)} \in G^{(W_p)} \right\} \subset W$;
4) aplicația λ a grupului $G^{(W_p)}$ pe grupul G conform regulii $\lambda\left[g^{(w)} \right] = g$ este izomorfă.

Demonstrație: Necesitatea este evidentă, deoarece orice grup W'-pseudominor de W_p-simetrie $G^{(W_p)}$ cu grupul generator G şi grupul iniţial de substituţii P verifică condiţiile 1) – 4). Aceste condiţii sunt şi suficiente pentru ca grupul $G^{(W_p)}$ să fie grup W'-pseudominor de W_p-simetrie. Într-adevăr, din condițiile 1) şi 2) rezultă că $G^{(W_p)}$ este grup de W_p-simetrie, din 3) – că este grup de W_p-simetrie incompletă, cu grupul generator G şi $W' = \left\{ w \middle| g^{(w)} \in G^{(W_p)} \right\}$, unde $w_0 \subset W' \subset W$. Deoarece $V = G^{(W_p)} \cap W'$ reprezintă nucleul omomorfismului λ al grupului $G^{(W_p)}$ pe G, după legea $\lambda\left[g^{(w)} \right] = g$, atunci din 4) rezultă că $V = w_0$ şi $V \subset W' \subset W$. Prin urmare, $G^{(W_p)}$ este grup W'-pseudominor de W_p-simetrie. Teorema este demonstrată.

4. În continuare vom cerceta o metodă de deducere a grupurilor pseudominore de W_p-simetrie din grupurile clasice de simetrie şi grupul inițial de substituții P.

Teoremă 3: Orice grup W'-pseudominor $G^{(W_p)}$ de W_p-simetrie poate fi dedus, cunoscând grupul său generator G şi grupul multicomponent de permutări $W = \bar{\Pi}_{g_i \in G} P^{g_i}$ conform paşilor următori:

1) se construieşte cvasiomomorfismul exact natural de stânga μ al grupului G pe submulțimea W' cu unitate din grupul W după legea $\mu(g_i) = w_i$;
2) se stabilesc în calitate de componente ale transformării $g^{(w)}$ elementele din grupul G şi submulțimea W' ce corespund unele altora după μ: $g^{(w)} = gw$, unde $w = \mu(g)$;
3) se introduce în mulțimea elementelor obținute $g^{(w)}$ operația (1).

$$g_i^{(w_i)} \circ g_j^{(w_j)} = g_k^{(w_k)}, \tag{1}$$

unde $g_k = g_i g_j$, $w_k = w_i^{g_j} w_j$, $w_i = \left\langle p_i^{g_1}, p_i^{g_2}, ..., p_i^{g_n}, ... \right\rangle$, iar $w_i^{g_j} = \left\langle p_i^{g_j g_1}, p_i^{g_j g_2}, ..., p_i^{g_j g_n}, ... \right\rangle = \bar{g}_j(w_i)$.

Demonstrație: Fie $G^{(W_p)}$ – grup W'-pseudominor de W_p-simetrie, ce are grupul generator G şi subgrupul de simetrie H. Deoarece $G^{(W_p)}$ este grup de W_p-simetrie, apoi regula de înmulțire a elementelor are forma: $g_i^{(w_i)} \circ g_j^{(w_j)} = g_k^{(w_k)}$, unde $g_k = g_i g_j$, iar $w_k = w_i^{g_j} w_j$, adică $w_i^{g_j}(g_k) = w_i(g_j g_k)$ pentru orice element g_k din G.

Stabilim aplicațiile λ și σ ale grupului $G^{(W_p)}$, respectiv, pe grupul său generator G și submulțimea W' cu unitate după legile $\lambda\left[g^{(w)}\right]=g$ și $\sigma\left[g^{(w)}\right]=w$, unde g și w sunt componente ale transformării $g^{(w)}\in G^{(W_p)}$. Evident, că λ este izomorfism. De aceea, există izomorfismul invers λ^{-1} al grupului G pe $G^{(W_p)}$ după legea $\lambda^{-1}(g)=g^{(w)}$.

Vom arăta acum că σ este un cvasiomomorfism exact natural de stânga cu nucleul H al grupului $G^{(W_p)}$ pe W'. Într-adevăr, fie $\sigma\left[g_i^{(w_i)}\right]=w_i$ și $\sigma\left[g_j^{(w_j)}\right]=w_j$. Atunci, conform operației de înmulțire din $G^{(W_p)}$ ($g_i^{(w_i)}\circ g_j^{(w_j)}=g_k^{(w_k)}$, unde $g_k=g_ig_j$, iar $w_k=w_i^{g_j}w_j=\bar{g}_j(w_i)w_j$), vom avea că $\sigma\left[g_i^{(w_i)}g_j^{(w_j)}\right]=\sigma\left[g_k^{(w_k)}\right]=w_k=\bar{g}_j(w_i)w_j$. Automorfismul $\bar{g}_j$ acționează asupra elementelor w_j din $W'=\sigma\left[G^{(W_p)}\right]$ prin intermediul g_j-deplasării de stânga a componentelor, adică $\bar{g}_j(w_i)=\bar{g}_j(\langle p_i^{g_1},p_i^{g_2},...,p_i^{g_n},...\rangle)=\langle p_i^{g_jg_1},p_i^{g_jg_2},...,p_i^{g_jg_n},...\rangle$. Prin urmare, automorfismele $\bar{g}_j$ se evidențiază la includerea izomorfă φ a grupului G în grupul $AutW$ după regula $\varphi(g_j)=\bar{\varphi}_{g_j}\equiv\bar{g}_j$.

Aşadar, s-a demonstrat că σ este cvasiomomorfism exact natural de stânga. Evident, $Ker\sigma=H$, deoarece σ aplică pe unitatea w_0 a grupului W numai elementele h din subgrupul de simetrie clasică al grupului $G^{(W_p)}$.

În calitate de aplicație μ a grupului G pe W' luăm rezultatul efectuării succesive a aplicațiilor λ^{-1} și σ cu legea

$$\mu(g)=\sigma\lambda^{-1}(g)=\sigma\left[g^{(w)}\right]=w,$$

unde g și w sunt componente ale transformării $g^{(w)}$ din $G^{(W_p)}$. În calitate de $Ker\mu$ este subgrupul H, aşa cum λ^{-1} - izomorfism, ce aplică H pe H, iar nucleul aplicației σ reprezintă subgrupul H.

Deoarece grupul W'-pseudominor $G^{(W_p)}$ de W_p-simetrie constă numai din aşa elemente $g^{(w)}=gw$, unde componentele geometrice g sunt diferite pentru diferite elemente $g^{(w)}$ și în totalitate formează grupul G, iar componentele w formează submulțimea W' cu unitate a grupului W, apoi pentru $G^{(W_p)}$ sunt verificate toate condițiile descrise în cei trei paşi.

Vom demonstra acum că mulțimea tuturor transformărilor, obținută conform paşilor descrişi în enunțul teoremei din grupurile date G și W, întotdeauna este grup W'-pseudominor de W_p-simetrie.

Fie pentru grupurile date G și W există cvasiomomorfismul exact natural de stânga μ al grupului G pe submulțimea W' al grupului W cu legea $\mu(g_i)=w_i$, unde automorfismul $\bar{g}_j=\varphi(g_j)$ acționează asupra elementelor w_i prin intermediul g_j-deplasării la stânga a componentelor sale. Alcătuim mulțimea $G^{(W_p)}$ a acestor perechi $gw=g^{(w)}$, unde $w=\mu(g)$. În $G^{(W_p)}$ introducem operația (1).

Închiderea mulțimii $G^{(W_p)}$ față de operația dată rezultă din faptul că G este grup, iar μ –cvasiomomorfism de stânga natural exact. Asociativitatea operației se verifică trivial. Existența elementului invers $\left[g^{(w)}\right]^{-1}$ al lui $g^{(w)}=gw$ din $G^{(W_p)}$, de asemenea, urmează din faptul că G este grup, iar μ este cvaziomomorfism de stânga natural exact. Anume: fie $g^{(w)}\in G^{(W_p)}$, atunci $g^{(w)}=gw$, unde $g\in G$, $w\in W'$ și $w=\mu(g)$. Deoarece G este grup, apoi $g^{-1}\in G$. Fie $\mu(g^{-1})=w^*\in W'$; deci $g^{-1}w^*=g^{-1(w^*)}\in G^{(W_p)}$. Pe de o parte, $\mu(gg^{-1})=\mu(1)=w_0$, iar, pe de altă parte, $\mu(gg^{-1})=\mu(g^{-1}g)=\bar{g}(w^*)w$. Prin urmare, $\bar{g}(w^*)w=w_0$, de aceea $\bar{g}(w^*) = w^{-1}$. Deoarece $(\bar{g})^{-1} = \bar{g}^{-1}$ (din considerentul că φ – izomorfism), apoi $w^* = \bar{g}^{-1}(w^{-1})$. Am obținut, că $g^{-1}\left[\bar{g}^{-1}(w^{-1})\right]$ este element din $G^{(W_p)}$.

Vom arăta acum că produsul elementelor gw și $g^{-1}\left[\bar{g}^{-1}(w^{-1})\right]$ este egal cu elementul neutru $1w_0$ din $G^{(W_p)}$. Într-adevăr, $g^{-1}\left[\bar{g}^{-1}(w^{-1})\right] \circ gw = g^{-1}g\bar{g}\left[\bar{g}^{-1}(w^{-1})\right]w = 1w^{-1}w = 1w_0$.

Aşadar, elementul invers al oricărui element $g^{(w)}$ din $G^{(W_p)}$, notat prin simbolul $\left[g^{(w)}\right]^{-1} = g^{-1}\left[\bar{g}^{-1}(w^{-1})\right]$, de asemenea aparține lui $G^{(W_p)}$. Prin urmare, $G^{(W_p)}$ este un grup de W_p-simetrie.

Din faptul că μ aplică grupul G pe submulțimea W' cu unitate din W rezultă că $W' = \left\{ w \middle| g^{(w)} \in G^{(W_p)} \right\}$. $G^{(W_p)} \bigcap W' = 1w_0 = G^{(W_p)} \bigcap W$, deoarece unitatea 1 a grupului G, conform aplicației μ, se va aplica numai pe unitatea w_0 a grupului W. Aşadar, grupul obținut $G^{(W_p)}$ este grup W'-pseudominor de W_p-simetrie. Teorema este demonstrată.

Remarcă: Pentru deducerea concretă a grupurilor pseudominore de W_p-simetrie este comod de utilizat următorul algoritm:

1) Având date grupurile G și P de găsit $W = \bar{\Pi}_{g_i \in G} P^{g_i}$, $W'' = DiagW \cong P$, izomorfismul $\varphi : G \to AutW$ după regula $\varphi(g) = \bar{g}$, unde $\bar{g}$ efectuează g-deplasarea la stânga a componentelor în fiecare $w \in W$;
2) De descris acțiunea automorfismului $\bar{g}$ asupra factorilor P^{g_i} la nivel de substituții;
3) De găsit în G toate subgrupurile adevărate posibile H și G_1 ($H < G$ și $G_1 < G$), în W'' toate subgrupurile posibile W_1, iar în grupul W toate submulțimile cu unitate W', care verifică condițiile: $G_1/H \cong W_1$ și $W_1 = W' \bigcap W''$;
4) De construit omomorfismul cu nucleul H al grupului G_1 pe W_1;
5) De descompus grupul G în clase de resturi de dreapta în raport cu subgrupul H și de stabilit aşa o corespondență biunivocă μ între descompunerea dată și submulțimea W' (păstrând corespondența dintre elementele subgrupurilor G_1 și W_1, obținută în rezultatul omomorfismului cu nucleul H al grupului G_1 pe W_1), care în calitate de aplicație a grupului G pe W' ar fi cvasiomomorfism exact natural de stânga cu nucleul H.

Pentru a prezenta grupurile pseudominore $G^{(W_p)}$ de W_p-simetrie, este comod de utilizat următorul simbol complex (cu mai mulți termeni): $G/(P|W'|W_1; G_1/H'/H)$, unde: 1) G – grup generator pentru $G^{(W_p)}$; 2) P – grup inițial de substituții; 3) W' – mulțimea „substituțiilor" ce intră în calitate de componente în $g^{(w)} \in G^{(W_p)}$, unde $w_0 \subset W' \subseteq W = \bar{\Pi}_{g_i \in G} P^{g_i}$; 4) H – subgrupul de simetrie pentru $G^{(W_p)}$ ($H = G^{(W_p)} \bigcap G$); 5) $G_1/H'/H$ – simbolul cu trei componente al grupului $G_1^{(W_1)}$ de P-simetrie, ce reprezintă un subgrup al grupului $G^{(W_p)}$; 6) $G_1/H \cong W_1$, unde $W_1 = \left\{ w \middle| g^{(w)} \in G_1^{(W_1)} \right\} \subset W'$ și $W_1 \le DiagW$.

5. În continuare vom analiza câteva exemple concrete de deducere a grupurilor pseudominore de W_p-simetrie.

Exemplul 1: Analizăm în primul rând un exemplu de deducere a grupurilor pseudominore de W_p-simetrie din grupul inițial de substituții $P = \{e, p = (12)\} \cong C_2$ și grupul ciclic de ordinul 3 $G = C_3$. Aşadar,

$G = C_3 \square 3 = \{1, 3, 3^{-1}\}$ şi $W = P^1 \times P^3 \times P^{3^{-1}}$. Conform omomorfismului $\varphi : G \to AutW$, obţinem că $\varphi(G) = \bar{G} = \bar{C}_3 = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{3}^{-1}\}$, unde simbolul $\bar{g}$ semnifică automorfismul $\bar{\varphi}_g = \varphi(g)$ ce realizează g-deplasarea la stânga în fiecare $w \in W$. Acţiunea automorfismului $\bar{g}$ asupra factorilor P^{g_i} ai grupului W o prezentăm în forma substituţiilor lor:

$$\bar{1}(P^{g_i}) = P^{g_i} : (P^1)(P^3)(P^{3^{-1}});\ \bar{3}(P^{g_i}) = P^{3g_i} : (P^1 P^3 P^{3^{-1}});\ \bar{3}^{-1}(P^{g_i}) = P^{3^{-1}g_i} : (P^1 P^{3^{-1}} P^3).$$

În calitate de nucleu $Ker\mu$ al cvasiomomorfismului de stânga natural exact μ al grupului $G = C_3$ în grupul W poate servi doar subgrupul H de indicele 3 în G, adică $H = C_1 = \{1\}$. Prin urmare, pentru deducerea grupurilor pseudominore de W_p-simetrie cu grupul generator $G = C_3$, vom studia doar acele submulţimi cu unitate W', pentru care $|W'| = 3$.

Fie $H = \{1\}$. Atunci, $W' = (w_0, w_1, w_2)$, unde $w_0 =< e^1, e^3, e^{3^{-1}} >$, iar structura concretă a elementelor w_i ($i = 1, 2$) o vom determina reieşind din condiţia că aplicaţia μ a grupului $G = C_3$ pe W', conform regulii $\mu(1) = w_0$, $\mu(3) = w_1$, $\mu(3^{-1}) = w_2$, să fie cvasiomomorfism de stânga natural exact. Observăm că w_0 are ordinul 1, iar celelalte două elemente au ordinul 2. Mai mult decât atât, din $\mu(3) = w_1$ şi $\mu(3^{-1}) = w_2$ obţinem $\mu(3 \cdot 3) = w_1^3 w_1 = w_2 = \mu(3^{-1})$ şi $\mu(3^{-1} \cdot 3^{-1}) = w_2^{3^{-1}} w_2 = w_1 = \mu(3)$. Deoarece sunt verificate egalităţile $\mu(3 \cdot 3^{-1}) = w_1^{3^{-1}} w_2 = w_1^{3^{-1}} w_1^3 w_1 = w_0 = \mu(1)$ şi $\mu(3^{-1} \cdot 3) = w_2^3 w_1 = w_0 = \mu(1)$, se obţine $w_1^{3^{-1}} w_2 = w_2^3 w_1$.

Fie $w_1 =< q_1, q_2, q_3 >$ şi $w_2 =< r_1, r_2, r_3 >$. Atunci, se obţin următoarele rezultate: $w_1^{3^{-1}} =< q_2, q_3, q_1 >$, $w_1^3 =< q_3, q_1, q_2 >$ şi $w_1^3 w_1 =< q_3 q_1, q_1 q_2, q_2 q_3 >$. Din egalitatea $w_1^3 w_1 = w_2$ urmează egalităţile: $r_1 = q_3 q_1$, $r_2 = q_1 q_2$, $r_3 = q_2 q_3$. Din faptul că $w_1^{3^{-1}} w_1^3 w_1 = w_0$ urmează rezultatul: $q_1 q_2 q_3 = e$. Sunt posibile următoarele trei variante: 1) $w_1 =< e, p, p >$, iar $w_2 =< p, p, e >$; 2) $w_1 =< p, e, p >$, iar $w_2 =< e, p, p >$; 3) $w_1 =< p, p, e >$, iar $w_2 =< p, e, p >$.

În rezultat, obţinem 3 submulţimi W_i' ($i = \overline{1,3}$), care ne dau 3 grupuri pseudominore de W_p-simetrie: $W_1' = (w_0, w_1 =< e, p, p >, w_2 =< p, p, e >)$, $W_2' = (w_0, w_1 =< p, e, p >, w_2 =< e, p, p >)$ şi $W_3' = (w_0, w_1 =< p, p, e >, w_2 =< p, e, p >)$. Simbolul grupurilor pseudominore obţinute este $C_3 / (C_2 \Big| W_i' \Big| w_0; C_1 / C_1 / C_1)$, unde $i = \overline{1,3}$.

Exemplul 2: În continuare vom deduce grupurile pseudominore de W_p-simetrie din grupul iniţial de substituţii $P = \{e, p = (123), p^{-1} = (132)\} \cong C_3$ şi grupul abelian $G = C_{2v}$. Aşadar, $G = C_{2v} \square 2 \cdot m = \{1, 2, m_1, m_2\}$ şi $W = P^1 \times P^2 \times P^{m_1} \times P^{m_2}$. Conform omomorfismului $\varphi : G \to AutW$, obţinem că $\varphi(G) = \bar{G} = \bar{C}_{2v} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{m}_1, \bar{m}_2\}$, unde simbolul $\bar{g}$ semnifică automorfismul $\bar{\varphi}_g = \varphi(g)$ ce realizează g-deplasarea la stânga în fiecare $w \in W$. Acţiunea automorfismului $\bar{g}$ asupra factorilor P^{g_i} ai grupului W o prezentăm în forma substituţiilor lor:

$$\bar{1}(P^{g_i}) = P^{g_i} : (P^1)(P^2)(P^{m_1})(P^{m_2});\ \bar{2}(P^{g_i}) = P^{2g_i} : (P^1 P^2)(P^{m_1} P^{m_2});$$

$$\bar{m}_1(P^{g_i}) = P^{m_1 g_i} : (P^1 P^{m_1})(P^2 P^{m_2});\ \bar{m}_2(P^{g_i}) = P^{m_2 g_i} : (P^1 P^{m_2})(P^2 P^{m_1}).$$

În calitate de nucleu $Ker\mu$ al cvasiomomorfismului de stânga natural exact μ al grupului $G = C_{2v}$ în grupul W pot servi doar subgrupurile H de indicele 4 şi 2 în G, adică $H = C_1 = \{1\}$, $H = C_2 = \{1, 2\}$ sau

$H = C_{1h}^i = \{1, m_i\}$ ($i = 1, 2$). Prin urmare, pentru deducerea grupurilor pseudominore de W_p-simetrie cu grupul generator $G = C_{2v}$, vom studia doar acele submulțimi cu unitate W', pentru care $|W'| = 4$ sau $|W'| = 2$.

1. Fie $H = \{1\}$. Atunci, $W' = (w_0, w_1, w_2, w_3)$, unde $w_0 =< e^1, e^2, e^{m_1}, e^{m_2} >$, iar structura concretă a elementelor w_i ($i = \overline{1,3}$) o vom determina reieşind din condiția că aplicația μ a grupului $G = C_{2v}$ pe W', conform regulii $\mu(1) = w_0$, $\mu(2) = w_1$, $\mu(m_1) = w_2$, $\mu(m_2) = w_3$, să fie cvasiomomorfism de stânga natural exact. Observăm că w_0 are ordinul 1, iar celelalte trei elemente ordinul 3. Mai mult, din $\mu(2) = w_1$ obținem $\mu(2 \cdot 2) = w_1^2 w_1 = w_0 = \mu(1)$, iar din $\mu(m_1) = w_2$ obținem $\mu(m_1 \cdot m_1) = w_2^{m_1} w_2 = w_0 = \mu(1)$. Din $\mu(2 \cdot m_1) = w_1^{m_1} w_2 = w_3 = \mu(m_2)$ şi $\mu(m_1 \cdot 2) = w_2^2 w_1 = w_3 = \mu(m_2)$ se obține că $w_1^{m_1} w_2 = w_2^2 w_1$.

Fie $w_1 =< r_1, r_2, r_3, r_4 >$ şi $w_2 =< q_1, q_2, q_3, q_4 >$. Este evident că $w_1^2 =< r_2, r_1, r_4, r_3 >$ şi $w_2^{m_1} =< q_3, q_4, q_1, q_2 >$, iar $w_1^2 w_1 =< r_2 r_1, r_1 r_2, r_4 r_3, r_3 r_4 >$ şi $w_2^{m_1} w_2 =< q_3 q_1, q_4 q_2, q_1 q_3, q_2 q_4 >$. Din egalitatea $w_1^2 w_1 = w_0$ urmează relațiile: $r_1 r_2 = r_2 r_1 = r_3 r_4 = r_4 r_3 = e$. Din relația $w_2^{m_1} w_2 = w_0$ vom obține egalitățile: $q_1 q_3 = q_2 q_4 = q_3 q_1 = q_4 q_2 = e$. Mai mult decât atât, egalitatea $w_1^{m_1} w_2 = w_2^2 w_1$ implică relațiile: $r_3 q_1 = q_2 r_1$, $r_4 q_2 = q_1 r_2$, $r_1 q_3 = q_4 r_3$, $r_2 q_4 = q_3 r_4$.

Din cele 81 de elemente ale grupului W determinăm care sunt variantele posibile pentru w_1 şi w_2. Ținând cont de condițiile descrise mai sus asupra componentelor r_1, r_2, r_3 şi r_4, respectiv, q_1, q_2, q_3 şi q_4, atunci pentru w_1 şi w_2 sunt posibile următoarele variante: 1) $w_1 =< e, e, p, p^{-1} >$, iar $w_2 =< e, p, e, p^{-1} >$ sau $w_2 =< p^{-1}, e, p, e >$; 2) $w_1 =< e, e, p^{-1}, p >$, iar $w_2 =< e, p^{-1}, e, p >$ sau $w_2 =< p, e, p^{-1}, e >$; 3) $w_1 =< p, p^{-1}, e, e >$, iar $w_2 =< e, p^{-1}, e, p >$ sau $w_2 =< p, e, p^{-1}, e >$; 4) $w_1 =< p^{-1}, p, e, e >$, iar $w_2 =< e, p, e, p^{-1} >$ sau $w_2 =< p^{-1}, e, p, e >$; 5) $w_1 =< p, p^{-1}, p, p^{-1} >$, iar $w_2 =< p, p, p^{-1}, p^{-1} >$ sau $w_2 =< p^{-1}, p^{-1}, p, p >$; 6) $w_1 =< p^{-1}, p, p^{-1}, p >$, iar $w_2 =< p, p, p^{-1}, p^{-1} >$ sau $w_2 =< p^{-1}, p^{-1}, p, p >$.

Din cele expuse mai sus putem conchide că se obțin 12 submulțimi W', pentru care elementele w_3 se determină ținând cont de una din relațiile $w_3 = w_1^{m_1} w_2 =< r_3 q_1, r_4 q_2, r_1 q_3, r_2 q_4 >$ sau $w_3 = w_2^2 w_1 =< q_2 r_1, q_1 r_2, q_4 r_3, q_3 r_4 >$.

$W_1' = (w_0 =< e, e, e, e >, w_1 =< e, e, p, p^{-1} >, w_2 =< e, p, e, p^{-1} >, w_3 =< p, e, e, p^{-1} >)$;

$W_2' = (w_0 =< e, e, e, e >, w_1 =< e, e, p, p^{-1} >, w_2 =< p^{-1}, e, p, e >, w_3 =< e, p^{-1}, p, e >)$;

$W_3' = (w_0 =< e, e, e, e >, w_1 =< e, e, p^{-1}, p >, w_2 =< e, p^{-1}, e, p >, w_3 =< p^{-1}, e, e, p >)$;

$W_4' = (w_0 =< e, e, e, e >, w_1 =< e, e, p^{-1}, p >, w_2 =< p, e, p^{-1}, e >, w_3 =< e, p, p^{-1}, e, >)$;

$W_5' = (w_0 =< e, e, e, e >, w_1 =< p, p^{-1}, e, e >, w_2 =< e, p^{-1}, e, p >, w_3 =< e, p^{-1}, p, e >)$;

$W_6' = (w_0 =< e, e, e, e >, w_1 =< p, p^{-1}, e, e >, w_2 =< p, e, p^{-1}, e >, w_3 =< p, e, e, p^{-1} >)$;

$W_7' = (w_0 =< e, e, e, e >, w_1 =< p^{-1}, p, e, e >, w_2 =< e, p, e, p^{-1} >, w_3 =< e, p, p^{-1}, e >)$;

$W_8' = (w_0 =< e, e, e, e >, w_1 =< p^{-1}, p, e, e >, w_2 =< p^{-1} e, p, e >, w_3 =< p^{-1}, e, e, p >)$;

$W_9' = (w_0 =< e, e, e, e >, w_1 =< p, p^{-1}, p, p^{-1} >, w_2 =< p, p, p^{-1}, p^{-1} >, w_3 =< p^{-1}, e, e, p >)$;

$W_{10}' = (w_0 =< e, e, e, e >, w_1 =< p, p^{-1}, p, p^{-1} >, w_2 =< p^{-1}, p^{-1}, p, p >, w_3 =< e, p, p^{-1}, e >)$;

$W_{11}' = (w_0 =< e, e, e, e >, w_1 =< p^{-1}, p, p^{-1}, p >, w_2 =< p, p, p^{-1}, p^{-1} >, w_3 =< e, p^{-1}, p, e >)$;

$W_{12}' = (w_0 =< e,e,e,e >, w_1 =< p^{-1}, p, p^{-1}, p >, w_2 =< p^{-1}, p^{-1}, p, p >, w_3 =< p,e,e,p^{-1} >)$.

În rezultat, obținem 12 grupuri pseudominore de W_p-simetrie, al căror simbol este $C_{2v} / (C_3 \big| W_i' \big| w_0; C_1/C_1/C_1)$, unde $i = \overline{1,12}$.

2. Fie $H = C_2 = \{1,2\}$. Atunci $|W'| = 2$, deci $W' = (w_0, w)$, unde $w_0 =< e^1, e^2, e^{m_1}, e^{m_2} >$, iar structura concretă a elementului w o vom determina reieşind din condiția că aplicația μ a grupului $G = C_{2v}$ pe submulțimea W', conform regulii $\mu(1) = \mu(2) = w_0$ şi $\mu(m_1) = \mu(m_2) = w$, să fie cvasiomomorfism de stânga natural exact. Evident, w_0 are ordinul 1, iar w este de ordinul 3. Mai mult decât atât, vom avea că $\mu(m_1 \cdot m_2) = w^{m_2} w = w^{m_1} w = w_0 = \mu(2)$, $\mu(2 \cdot m_1) = w_0^{m_1} w = w = \mu(m_2)$ şi $\mu(m_1 \cdot 2) = w^2 w_0 = w = \mu(m_2)$.

Dacă w are componentele r_1, r_2, r_3, r_4, adică $w =< r_1, r_2, r_3, r_4 >$, atunci $w^2 =< r_2, r_1, r_4, r_3 >$. Din egalitatea $w^2 = w$ urmează relațiile: $r_1 = r_2$ şi $r_3 = r_4$. Iar din egalitățile $w^{m_2} w = w^{m_1} w = w_0$ urmează că $w^{m_2} = w^{m_1} = w^{-1}$. Prin urmare, $w =< r_1, r_1, r_3, r_3 >$, unde r_1 şi r_3 sunt componente reciproc inverse. În aceste condiții sunt posibile următoarele variante: 1) $w =< p, p, p^{-1}, p^{-1} >$ *şi* 2) $w =< p^{-1}, p^{-1}, p, p >$. Deci, am obținut 2 submulțimi W_i' ($i = 1,2$), care ne dau încă 2 grupuri pseudominore de W_p-simetrie: $W_1' = (w_0 =< e,e,e,e >, w =< p, p, p^{-1}, p^{-1} >)$ şi $W_2' = (w_0 =< e,e,e,e >, w =< p^{-1}, p^{-1}, p, p >)$. Simbolul acestor grupuri este $C_{2v} / (C_3 \big| W_i' \big| w_0; C_2/C_2/C_2)$, unde $i = 1,2$.

3. Fie $H = C_{1v}^1 = \{1, m_1\}$. Aşadar $|W'| = 2$, adică $W' = (w_0, w)$, unde $w_0 \neq w$ şi $w_0 =< e^1, e^2, e^{m_1}, e^{m_2} >$. Structura concretă a elementului w o vom determina reieşind din condiția că aplicația μ a grupului $G = C_{2v}$ pe submulțimea W', conform regulii $\mu(1) = \mu(m_1) = w_0$ şi $\mu(2) = \mu(m_2) = w$, să fie cvasiomomorfism de stânga natural exact. Din $\mu(2) = w$ obținem $\mu(2 \cdot 2) = w^2 w = w_0 = \mu(1)$, din $\mu(m_2) = w$ obținem $\mu(m_2 \cdot m_2) = w^{m_2} w = w_0 = \mu(1)$, iar din $\mu(2 \cdot m_1) = w^{m_1} w_0 = w = \mu(m_2)$ obținem $w^{m_1} = w$.

Fie $w =< r_1, r_2, r_3, r_4 >$, deci $w^{m_1} =< r_3, r_4, r_1, r_2 >$. Din egalitatea $w^{m_1} = w$ urmează că $r_1 = r_3$, iar $r_2 = r_4$. În consecință, se obține că $w =< r_1, r_2, r_1, r_2 >$. Din egalitățile $w^2 w = w^{m_2} w = w_0$ se obține $w^2 = w^{m_2} = w^{-1}$, adică $< r_2, r_1, r_2, r_1 >=< r_1^{-1}, r_2^{-1}, r_1^{-1}, r_2^{-1} >$. Prin urmare, $r_1 = r_2^{-1}$ şi $r_2 = r_1^{-1}$. În aceste condiții sunt posibile două variante: 1) $w =< p, p^{-1}, p, p^{-1} >$ şi 2) $w =< p^{-1}, p, p^{-1}, p >$. Deci, se obțin încă 2 submulțimi W_i' ($i = 1,2$) ce dau grupuri pseudominore de W_p-simetrie: $W_1' = (w_0 =< e,e,e,e >, w =< p, p^{-1}, p, p^{-1} >)$ şi $W_2' = (w_0 =< e,e,e,e >, w =< p^{-1}, p, p^{-1}, p >)$. Simbolul acestor grupuri este $C_{2v} /(C_3 \big| W_i' \big| w_0; C_{1v}^1/C_{1v}^1/C_{1v}^1)$, unde $i = 1,2$.

4. Şi în cazul când $H = C_{1v}^2 = \{1, m_2\}$, se obțin 2 submulțimi W_i' ($i = 1,2$), care ne dau încă 2 grupuri pseudominore de W_p-simetrie: $W_1' = (w_0 =< e,e,e,e >, w =< p, p^{-1}, p^{-1}, p >)$ şi $W_2' = (w_0 =< e,e,e,e >, w =< p^{-1}, p, p, p^{-1} >)$. Simbolul cu mai mulți termeni al acestor grupuri va fi $C_{2v} /(C_3 \big| W_i' \big| w_0; C_{1v}^2/C_{1v}^2/C_{1v}^2)$, unde $i = 1,2$.

În final putem face următoarea totalizare: am obținut 18 grupuri pseudominore de W_p -simetrie din grupul inițial de substituții $P = \{e, p = (123), p^{-1} = (132)\} \cong C_3$ şi grupul $G = C_{2v}$ în calitate de grup generator.

Referințe:

1. Копцик В.А., Коцев И.Н. К теории и классификации групп цветной симметрии. II. *W*-симметрия // Сообщения ОИЯИ. Р4-8068. - Дубна, 1974.
2. Lungu A.P. Classification of groups of *W*-symmetry. (Russian) // Studies in modern algebra and geometry. - Chisinau: Shtiintsa, 1983, p.79-84.
3. Заморзаев А.М., Карпова Ю.С, Лунгу А.П. и Палистрант А.Ф. /Р-симметрия и ее дальнейшее развитие. - Кишинев: Штиинца, 1986.
4. Лунгу А.П. К теории групп *W*-симметрии // Известия АН Республики Молдова. Математика, 1992, №3(9), с.72-81.
5. Lungu A. Aplicații cvasiomomorfe şi produse semidirecte de grupuri // Conferința ştiințifică jubiliară. - Chişinău: USM, 1996, p.22-24.
6. Лунгу А.П. Универсальная методика вывода конечных групп W_p-симметрии // Anale Ştiințifice ale USM. Seria „Ştiințe reale”. - Chişinău, 1997, p.16-22.
7. Lungu A. The discrete groups of generalized symmetry and the quasihomomorphic mappings // Scientific Annals Faculty of Mathematics and Informatics. State University of Moldova. - Chisinau, 1999, p.115-124.
8. Заморзаев А.М. О группах квазисимметрии (Р-симметрии). // Кристаллография, 1967, т.12, вып.5, с.819-825.

Prezentat la 03.03.2010