STUDIA UNIVERSITATIS
Revistă științifică a Universității de Stat din Moldova, 2009, nr.7(27)

PRINCIPII DE ECHILIBRU PARETO-NASH

Victoria LOZAN, Valeriu UNGUREANU

Catedra Matematică Aplicată

We consider the problem of determining the set of Pareto-Nash equilibriums in strategic games. The main results and method for solving the problem are explained. They are applied to solve the problem of finding Pareto-Nash equilibriums of two player bi-criteria games through constructing the intersection of the graphs of efficient respond applications. Illustration examples are presented.

În lucrare se cercetează noțiunea de echilibru Pareto-Nash prin detalierea/particularizarea tezelor teoretice din [1,2]. Se expun succint problema şi rezultatele teoretice de bază, apoi ele sunt aplicate la rezolvarea jocurilor diadice bicriteriale prin metoda construirii intersecției graficelor aplicațiilor de tip cel mai bun răspuns [3].

Definim jocul noncooperatist:

$$\Gamma = \left\langle \mathbf{N}, \left\{\mathbf{X}_p\right\}_{p\in N}, \left\{f_p^i\left(x\right)\right\}_{i=1}^{m_p}, p \in \mathbf{N} \right\rangle,$$

unde

- $\mathbf{N}$ = {*1, 2, ... ,n*} este mulțimea jucătorilor,
- $\mathbf{X}_p \subseteq \mathbf{R}^{k_p}$ este mulțimea de strategii ale jucătorului $p \in N$,
- $k_p < +\infty,\ p \in \mathbf{N}$,
- $\left\{f_p^i\left(x\right)\right\}_{i=1}^{m_p}$ sunt funcțiile de câştig ale jucătorului *p*, definite pe produsul cartezian $\mathbf{X} = \bigtimes_{p\in N} \mathbf{X}_p$.

Fiecare jucător are de rezolvat solitar o problemă de optimizare multicriterială, adică fiecare jucător urmează să selecteze din mulțimea sa de strategii acea strategie $x_p^* \in \mathbf{X}_p,\ p \in \mathbf{N}$, pentru care toate funcțiile lui de câştig $\left\{f_p^i\left(x_p^*, x_{-p}^*\right)\right\}_{i=1}^{m_p}$ iau valorile maxime. Strategia x_p^* se numeşte eficientă (optimală, în sens Pareto), dacă nu există o altă strategie $x_p' \in \mathbf{X}_p$ astfel încât $x_p' \succeq x_p^*$, adică să fie mai bună decât x_p^*.

Definiție. *Strategia x_p' este „mai bună” decât x_p^*, dacă*

$$\left\{f_p^i\left(x_p', x_{-p}\right)\right\}_{i=1}^{m_p} \geq \left\{f_p^i\left(x_p^*, x_{-p}\right)\right\}_{i=1}^{m_p},\ \forall x_{-p} \in X_{-p},$$

şi există cel puțin un indice $j \in \{1,...,m_p\}$ şi un $x_{-p} \in X_{-p}$ pentru care are loc $f_p^j\left(x_p', x_{-p}\right) > f_p^j\left(x_p^*, x_{-p}\right)$; această relație se notează $x_p' \succeq x_p^*$.

Notăm mulțimea de strategii eficiente ale jucătorului *p* prin $\mathbf{ef}\ \mathbf{X}_p$. Orice două strategii eficiente sau sunt echivalente, sau sunt incomparabile. Soluție pentru fiecare jucător este mulțimea $\mathbf{ef}\ \mathbf{X}_p$.

Teorema 1. *Dacă mulțimile $\mathbf{X}_p \subseteq \mathbf{R}^{k_p}$ sunt compacte şi funcțiile sunt continue, adică $\left\{f_p^i\left(x\right)\right\}_{i=1}^{m_p} \in \mathbf{C}\left(\mathbf{X}_p\right)$, $p = \overline{1,n}$, atunci mulțimile $\mathbf{ef}\ \mathbf{X}_p$ sunt nevide.*

Elementele $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right) \in \mathbf{ef}\ \mathbf{X} = \bigtimes_{p\in N} \mathbf{ef}\ \mathbf{X}_p$ se numesc situații de echilibru în sensul Pareto-Nash (**PNE**) şi $\mathbf{PNE} = \bigcap_{p=1}^{n} \mathbf{ef}\ \mathbf{X}_p$.

Considerăm că jocul Γ este convex: mulțimile de strategii sunt convexe şi funcțiile de câştig sunt concave în raport cu strategiile proprii, când celelalte strategii sunt fixate.

Teorema 2. *Dacă în jocul convex mulțimile* $\mathbf{X}_p$, $p=\overline{1,n}$, *sunt compacte şi funcțiile* $\left\{f_p^i(x)\right\}_{i=1}^{m_p}$ *sunt continue pe* $\mathbf{X}=\underset{p\in\mathbf{N}}{\times}\mathbf{X}_p$, *atunci jocul* Γ *posedă echilibru Pareto-Nash.*

Exemplul 1. Considerăm jocul dintre doi jucători. Fiecare jucător are câte două strategii şi câte două funcții de câştig. Vom considera că jucătorii doresc să-şi maximizeze câştigul. Funcțiile de cost sunt date de matricele:

$$A=\begin{bmatrix}4{,}3 & 7{,}7\\ 6{,}6 & 8{,}4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}5{,}-1 & 2{,}4\\ 4{,}3 & 6{,}2\end{bmatrix}.$$

Mai întâi determinăm mulțimile **ef X** şi **ef Y** – mulțimea strategiilor eficiente a primului jucător şi, respectiv, a jucătorului doi. Elementele mulțimilor **ef X** şi **ef Y** sunt luate în paranteze unghiulare.

$$A=\begin{bmatrix}4{,}3 & \langle 7{,}7\rangle\\ 6{,}6 & \langle 8{,}4\rangle\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}5{,}-1 & \langle 2{,}4\rangle\\ \langle 4{,}3\rangle & \langle 6{,}2\rangle\end{bmatrix}.$$

$\mathbf{PNE}=\mathbf{ef\ X}\cap\mathbf{ef\ Y}=\left\{(1,0),(0,0)\right\}$ cu câştigurile $\left\{\left((7,7),(2,4)\right),\left((8,4),(6,2)\right)\right\}$.

În cazul strategiilor mixte pentru fiecare jucător vom construi funcția de sinteză care poate fi interpretată ca unica funcție de câştig a jucătorului:

$$F_p=\sum_{i=1}^{m_p}\lambda_i f_p^i(x)\to\max,\ \lambda_i\ge 0,\ \sum_{i=1}^{m_p}\lambda_i=1,\ p=\overline{1,n}.$$

Teorema 3. *Dacă* x_p^* *este soluție a problemei monocriteriale* $F_p=\sum_{i=1}^{m_p}\lambda_i f_p^i(x)\to\max$, $x\in\mathbf{X}$ *cu* $\lambda_i>0$, $i=\overline{1,m_p}$, $\sum_{i=1}^{m_p}\lambda_i=1$, *atunci* x_p^* *este punct eficient, pentru* x_{-p} *dat.*

Punctele $x^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)\in\mathbf{X}$ se numesc situații de echilibru în sensul Pareto-Nash, dacă pentru orice jucător *p*

$$F_p\left(x_p,x_{-p}^*\right)\le F_p\left(x_p^*,x_{-p}^*\right)\equiv F_p\left(x^*\right),\ \forall x_p\in X_p,$$

adică x^* este echilibru Nash, dacă şi numai dacă

$$F\left(x^*\right)=\left(\max_{x_1\in\mathbf{X}_1}F_1\left(x_1,x_{-1}^*\right),\max_{x_2\in\mathbf{X}_2}F_2\left(x_2,x_{-2}^*\right),...,\max_{x_n\in\mathbf{X}_n}F_n\left(x_n,x_{-n}^*\right)\right),$$

unde $\left(x_p,x_{-p}^*\right)\equiv\left(x_1^*,x_2^*,...,x_{p-1}^*,x_p,x_{p+1}^*,...,x_n^*\right)$, $p=\overline{1,n}$. Aşadar, echilibrul în sensul Pareto-Nash cere ca fiecare dintre jucători să-şi aleagă strategia proprie din mulțimea sa de strategii eficiente, ca cel mai bun răspuns la strategiile alese de ceilalți jucători.

Dacă notăm graficul aplicației $\operatorname*{Arg\,max}_{x_p\in\mathbf{X}_p}F_p\left(x_p,x_{-p}\right):\mathbf{X}_{-p}\to\mathbf{X}_p$ prin

$$Gr_p=\left\{\left(x_p,x_{-p}\right)\in\mathbf{X}:x_{-p}\in\mathbf{X}_{-p},\ x_p=\arg\max_{y_p\in\mathbf{X}_p}F_p\left(y_p,x_{-p}\right)\right\},$$

atunci $\mathbf{PNE}=\bigcap_{p=1}^{n}Gr_p$.

Prin **PNE** notăm mulțimea de echilibre Pareto-Nash, iar $\mathbf{X}_{-p}=\underset{i\in\mathbf{N}\setminus\{p\}}{\times}\mathbf{X}_i$, $x_{-p}=\left(x_1,x_2,...,x_{p-1},x_{p+1},...,x_n\right)$.

Teorema 4. *Dacă mulțimile* $\mathbf{X}_p$, $p=\overline{1,n}$ *sunt compacte și funcțiile* $F_p(x)$ *sunt continue pe* $\mathbf{X}=\underset{p\in\mathbf{N}}{\times}\mathbf{X}_p$, *atunci jocul* Γ *posedă echilibru Pareto-Nash.*

Exemplul 2 *(Determinarea echilibrului Pareto-Nash în jocul diadic bicriterial în strategii mixte)***.** Considerăm jocul dintre doi jucători în care mulțimile de strategii sunt:

$$\mathbf{X}=\{(x_1,x_2):\ x_1+x_2=1,\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\},$$

$$\mathbf{Y}=\{(y_1,y_2):\ y_1+y_2=1,\ y_1\ge 0,\ y_2\ge 0\},$$

iar funcțiile de câștig sunt biliniare (pentru strategia fixă a adversarului sunt liniare):

$$f_1^1\ (\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y},\ f_1^2\ (\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{y},\ f_2^1\ (\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{y},\ f_2^2\ (\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{y},$$

unde $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{R}^2$, $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}\in\mathbf{R}^{2\times 2}$. Pentru fiecare jucător vom construi funcțiile de sinteză:

$$F_p=\sum_{i=1}^{m_p}\lambda_i f_p^i(x)\to\max,\ p=\overline{1,2}.$$

Deoarece fiecare jucător are doar 2 funcții de câștig, vom considera $\lambda_1=\lambda>0$ și $\lambda_2=1-\lambda>0$, $\lambda_1+\lambda_2=1$, $\lambda\in[0,1]$; $\mu_1=\mu>0$ și $\mu_2=1-\mu>0$, $\mu_1+\mu_2=1$, $\mu\in[0,1]$, și atunci obținem:

$$F_1\ (\mathbf{x},\mathbf{y})=\lambda f_1^1\ (\mathbf{x},\mathbf{y})+(1-\lambda)f_1^2\ (\mathbf{x},\mathbf{y})=\lambda\ \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{y},$$

$$F_2\ (\mathbf{x},\mathbf{y})=\mu f_2^1\ (\mathbf{x},\mathbf{y})+(1-\mu)f_2^2\ (\mathbf{x},\mathbf{y})=\mu\ \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{y}+(1-\mu)\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{y}.$$

Ținând cont de specificul mulțimilor de strategii, prin transformări evidente:

$$x_1=x,\ x_2=1-x,\ 1\ge x\ge 0,$$

$$y_1=y,\ y_2=1-y,\ 1\ge y\ge 0,$$

vom trece la un joc secundar, echivalent cu cel inițial: $x,y\in[0,1]$, $\lambda,\mu\in[0,1]$,

$$F_1(x,y)=(\alpha(\lambda)y+\beta(\lambda))x+\alpha_0(\lambda)y+\beta_0(\lambda),$$

$$F_2(x,y)=(\gamma(\mu)x+\delta(\mu))y+\gamma_0(\mu)x+\delta_0(\mu),$$

unde:

$$\alpha(\lambda)=(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}-b_{11}+b_{12}+b_{21}-b_{22})\lambda+b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22},$$

$$\beta(\lambda)=(a_{12}-a_{22}-b_{12}+b_{22})\lambda+b_{12}-b_{22},\alpha_0(\lambda)=(a_{21}-a_{22}-b_{21}+b_{22})\lambda+b_{21}-b_{22},$$

$$\beta_0(\lambda)=(a_{22}-b_{22})\lambda+b_{22},$$

$$\gamma(\mu)=(c_{11}-c_{12}-c_{21}+c_{22}-d_{11}+d_{12}+d_{21}-d_{22})\mu+d_{11}-d_{12}-d_{21}+d_{22},$$

$$\delta(\mu)=(c_{21}-c_{22}-d_{21}+d_{22})\mu+d_{21}-d_{22},\ \gamma_0(\mu)=(c_{12}-c_{22}-d_{12}+d_{22})\mu+d_{12}-d_{22},$$

$$\delta_0(\mu)=(c_{22}-d_{22})\mu+d_{22}.$$

Pentru a determina mulțimea de echilibre Pareto-Nash, construim graficele aplicațiilor de tip cel mai bun răspuns ale jucătorilor:

$$\mathbf{Gr_1}=\begin{cases}1, & \alpha(\lambda)y+\beta(\lambda)>0,\\ 0, & \alpha(\lambda)y+\beta(\lambda)<0,\\ [0,1], & \alpha(\lambda)y+\beta(\lambda)=0.\end{cases}\qquad \mathbf{Gr_2}=\begin{cases}1, & \gamma(\mu)x+\delta(\mu)>0,\\ 0, & \gamma(\mu)x+\delta(\mu)<0,\\ [0,1], & \gamma(\mu)x+\delta(\mu)=0.\end{cases}$$

Exprimăm $y=-\dfrac{\beta(\lambda)}{\alpha(\lambda)}$ și $x=-\dfrac{\delta(\mu)}{\gamma(\mu)}$. Din aceste relații determinăm valorile pe care le iau x și y pe segmentul $[0,1]$, la fluctuația/variația parametrilor $\lambda,\mu\in[0,1]$. Fie $x\in[a,b]$ și $y\in[c,d]$. Pentru a determina graficele aplicațiilor, luăm: $\forall x_0\in[a,b]$ și desenăm graficul jucătorului doi în conformitate cu $\mathbf{Gr_2}$; $\forall y_0\in[c,d]$ și graficul primului jucător în conformitate cu $\mathbf{Gr_1}$. În intersecția acestor grafice vom avea mulțimea de echilibre Pareto-Nash.

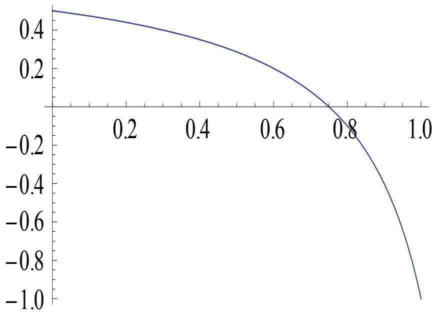
Exemplul 3. Vom considera că jucătorii doresc să-şi maximizeze câştigul. Funcţiile de cost sunt date de matricele:

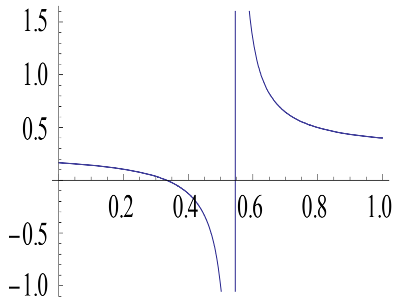
$$A=\begin{bmatrix}4{,}3 & 7{,}7\\ 6{,}6 & 8{,}4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}5{,}-1 & 2{,}4\\ 4{,}3 & 6{,}2\end{bmatrix}.$$

Pentru fiecare jucător vom construi funcţiile de sinteză: $F_p=\sum_{i=1}^{m_p}\lambda_i f_p^i(x)\to \max,\ p=\overline{1,2}$.

$$F_1=\lambda f_1^1(\bar{x},\bar{y})+(1-\lambda)f_1^2(\bar{x},\bar{y})=[(5\lambda-6)y-4\lambda+3]x+(4\lambda+10)y+4\lambda+4,$$
$$F_2=\mu f_2^1(\bar{x},\bar{y})+(1-\mu)f_2^2(\bar{x},\bar{y})=[(11\mu-6)x-3\mu+1]y+(2\mu+6)x+4\mu+2.$$

Vom afla mulţimea **PNE**, adică vom construi aplicaţiile de tip cel mai bun răspuns pentru $\lambda,\mu\in[0,1]$. Dacă variem λ şi μ pe segmentul $[0,1]$, atunci valorile pe care le poate lua *x* şi *y* variază în dependenţă de λ şi μ:





Analizând graficele de mai sus, observăm că:

$$y\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\ \text{şi}\ \lambda\in\left[0,\frac{3}{4}\right],$$
$$x\in\left[0,\frac{1}{6}\right]\cup\left[\frac{2}{5},1\right]\ \text{şi}\ \mu\in\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{5}{8},1\right].$$

În conformitate cu valorile de mai sus, aplicaţiile de tip cel mai bun răspuns variază pe $[0,1]\times[0,1]$, ele au următoarea formă: în Figura 1 este reprezentată variaţia aplicaţiei primului jucător şi în Figura 2 – a jucătorului doi.

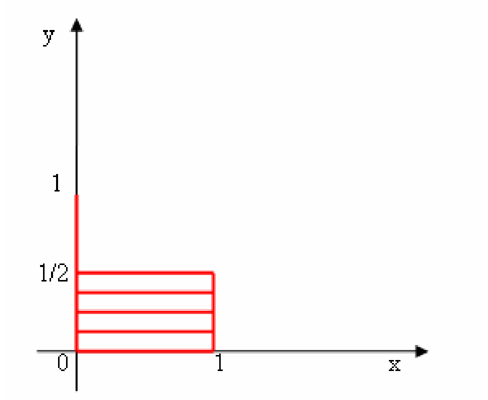


Fig.1 (Gr_1)

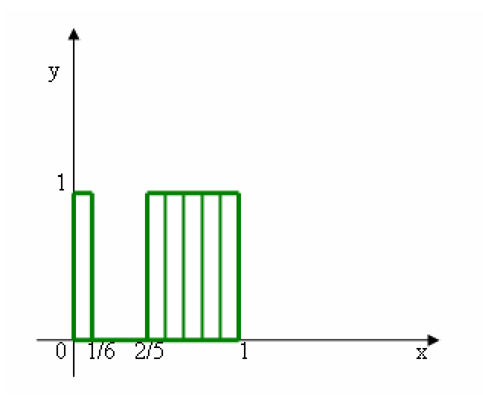


Fig.2 (Gr_2)

PNE = $Gr_1\cap Gr_2$. Această intersecţie este reprezentată în Figura 3.

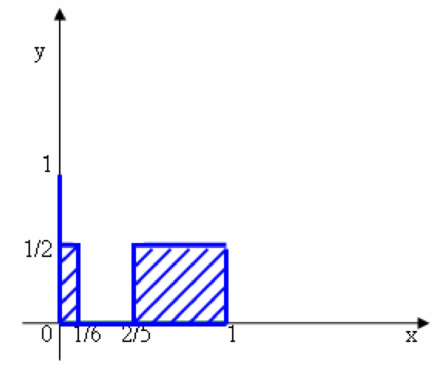


Fig.3 ($Gr_1 \bigcap Gr_2$)

În baza teoremelor 1–4 s-a construit în mod natural o metodă de rezolvare şi ilustrare grafică a problemelor de aflare a mulțimilor de echilibre Pareto-Nash. Exemplele ilustrează metoda studiată.

Referințe:

1. Sagaidac M.,Ungureanu V. Cercetări operaționale. - Chişinău: CEP USM, 2004.
2. Ungureanu V. Solution principles for simultaneous and sequential games mixture // ROMAI Journal. - 2008. - Vol.4. - No1. - P.225-242.
3. Ungureanu V. Nash equilibrium set computing in finite extended games // Computer Science Journal of Moldova. - 2006. - Vol.14. - No3(42). - P.345-365.

Prezentat la 28.10.2009