ТРЁХМЕРНЫЕ АСИММОРФНЫЕ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ РОЗЕТОЧНЫХ *P*-СИММЕТРИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАВЕРШЕНИЮ ПОЛНОГО ОБЗОРА ПЯТИМЕРНЫХ ГРУПП СИММЕТРИИ С ИНВАРИАНТНЫМИ ТРЕХМЕРНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ И ПРЯМОЙ В НЕЙ

Александр ПАЛИСТРАНТ

Кафедра алгебры и геометрии

Teoria generală a P-simetriei este folosită pentru a extinde grupurile asimorfe liniare cristalografice tridimensionale cu P-simetriile de rozetă. În lucrare sunt prezentate lista completă a P-simetriilor minore de rozetă şi caracteristicile numerice complete ale listelor de grupuri Q-medii de P-simetrie din categoriile indicate. De asemenea, pe baza teoriei generale a P-simetriei au fost obţinute toate versiunile posibile de grupuri tridimensionale, asimorfe cristalografice, liniare ale P-simetriilor de rozetă, fără a se ţine cont de enantimorfismul lor. Aceasta a permis evaluarea numerică a tuturor grupurilor „aisimorfe" de simetrie ale spaţiului euclidian de dimensiunea cinci, care păstrează invariant în acest spaţiu un plan tridimensional şi o dreaptă pe plan. Este dată analiza rezultatelor „simorfe", „hemisimorfe" şi „asimorfe" referitoare la numărul total de grupuri de simetrie în spaţiul euclidian de dimensiunea cinci, ce păstrează invariant în el un plan tridimensional şi o dreaptă pe acest plan. Pe baza acestei analize a fost determinat numărul grupurilor cinci-dimensionale, cu un plan tridimensional invariant şi o dreaptă invariantă pe acest plan.

Based on the general P-symmetry theory, three-dimensional asimmorfic crystallographic linear groups are expanded up to groups of rosettal P-symmetries. The list of junior rosettal P-symmetries of this category is completely presented and the full numerical review of Q-middle groups of noted P-symmetries of the mentiomed above category is given. The number of different "hemisymmorfhic" symmetry groups of five-dimensional Euclidian space, which keep in it invariant the three-dimensional plane with straight line in it is estabilished by means of revealed every possible (from the point of view of general P-symmetries theory) different, without taking into account enantiomorphism, three-dimensional crystallographic linear rosettal P-symmetries. The analysis of the results of determined number of different "symmorphic", "hemisymmorphic" and "asymmorphic" groups of symmetry of five-dimensional Euclidian space, which keep in it invariant three-dimensional plane with straight line in it, and number of different five-dimensional group of symmetry of this category is determined.

1. Трёхмерные кристаллографические линейные группы G_{31}, называемые также стержневыми или цилиндрическими, являются такими подгруппами трёхмерных федоровских групп G_3, которые сохраняют в трёхмерном эвклидовом пространстве инвариантной некоторую прямую, называемую осью группы, но не сохраняют инвариантной одну и ту же точку этого пространства [1]. Элементами симметрии таких групп поэтому могут быть только переносы на векторы, лежащие на оси группы, повороты, в том числе винтовые и зеркальные, на кристаллографические углы вокруг оси группы, повороты вокруг осей второго порядка, перпендикулярных оси группы, отражения и скользящие отражения от плоскостей, проходящих через ось группы, а также отражения от плоскости, перпендикулярной оси группы, ибо эти преобразования симметрии переводят в себя ось группы и не сохраняют неподвижной одну и ту же точку указанного пространства.

Рассмотрим любое преобразование f из группы G_{31}. Его можно разложить в произведение переноса s на вектор, лежащий на оси группы, и "поворота" w вокруг наперёд заданной точки O, также лежащей на оси этой группы и переводящей её в себя, $f = s \bullet w$. Поставив в соответствие всякому f входящий в него "поворот" w, получим гомоморфизм группы G_{31} на множество "поворотов" W, являющихся конечной точечной мультипликативной группой категории G_{320}. Ядром этого гомоморфизма служит одномерная циклическая подгруппа переносов T, тогда по основной теореме о гомоморфизмах T – нормальный делитель в группе G_{31}, а фактор-группа G_{31}/T изоморфна группе W(запись $G_{31}/T \simeq W$) [2].

Комбинируя одномерную циклическую группу параллельных переносов на векторы, лежащие на оси группы, с точечными группами таблеток G_{320}, сохраняющими ось группы, получим сначала 31 симморфную, а затем 13 гемисимморфных и 31 асимморфную трёхмерную линейную кристаллографическую группу симметрии G_{31} [1]. Все эти группы полностью выписаны в графе 2 таблицы 1 в [3] в символике А.М. Заморзаева, а в графе 3 этой же таблицы даны соответствующие интернациональные символы, извлечённые из [4].

Настоящая статья является логическим продолжением работ [5] и [6] и посвящается обобщению оставшихся асимморфных трёхмерных кристаллографических линейных групп с 10 розеточными *P*-симметриями и их применению к исследованию пятимерных групп симметрии с инвариантной трёхмерной плоскостью и прямой в ней, то есть асимморфных групп симметрии категории G_{531}.

2. Напомним необходимые сведения, связанные с решением поставленной задачи, ибо при обобщении асимморфных трёхмерных классических линейных групп симметрии с розеточными *P*-симметриями нужно ясно представлять себе их структуру, которая непосредственно следует из самого способа их вывода. В самом деле, согласно определению, асимморфная трёхмерная кристаллографическая линейная группа симметрии – это такая стержневая дискретная группа, в которой среди преобразований симметрии первого рода имеются неразложимые на переносы и повороты элементы, сохраняющие её ось. Следовательно, трёхмерную асимморфную линейную группу симметрии можно получить из такой симморфной стержневой группы симметрии, в которой имеются поворотные оси порядка n = 2, 3, 4 и 6, направленные по оси группы, путём их замены на всевозможные винтовые оси n-го порядка, также лежащие на оси группы (ср.[7]). Из сказанного следует, что такими симморфными стержневыми группами симметрии, из которых выводятся трёхмерные линейные асимморфные кристаллографические группы симметрии, являются группы *p112, p3, p4, p6, p112/m, p4/m, p6/m, pmm2, p4mm, p6mm, pmmm, p4/mmm, p6/mmm, p222, p32, p422, p622,* выписанные в [5] в интернациональной символике, отражающей полную систему образующих элементов этих групп.

Проследим вывод асимморфных трёхмерных линейных групп симметрии из выписанных выше 17 симморфных стержневых групп.

Так, из симморфной группы *p112* выводится одна асимморфная группа $p112_1$, в которой винтовая ось 2_1 получена из оси *2* добавлением к ней параллельного переноса на вектор $\frac{1}{2}\overline{p}$, где $\overline{p}$ – основной вектор переноса, лежащий на оси группы *p112*.

Из группы *p3* выводятся две асимморфные группы $p3_1$ и $p3_2$, различающиеся между собой только за счёт правизны и левизны винтовых осей 3_1 и 3_2, то есть группы $p3_1$ и $p3_2$ составляют энантиоморфную пару групп. Винтовые оси 3_1 и 3_2 указанных групп получаются из поворотной оси 3 добавлением ей параллельного переноса на вектор $\frac{k}{3}\overline{p}$, где *k* принимает значения *1* и *2*.

Далее, из группы *p4* выводятся три асимморфные группы $p4_1$, $p4_2$ и $p4_3$, в которых винтовые оси 4_1, 4_2 и 4_3 с энантиоморфной парой 4_1 и 4_3 получаются из поворотной оси 4 добавлением ей параллельного переноса на вектор $\frac{k}{4}\overline{p}$, где *k* принимает значения, равные *1,2* и *3*, а $\overline{p}$ – основной вектор переноса, лежащий на оси группы *p4*.

Из группы *p6* выводятся пять асимморфных групп $p6_1$, $p6_2$, $p6_3$, $p6_4$ и $p6_5$, в которых винтовые оси 6_1, 6_2, 6_3, 6_4 и 6_5 с двумя энантиоморфными парами 6_1 и 6_5, а также 6_2 и 6_4, получаются из поворотной оси *6* добавлением ей параллельного переноса на вектор $\frac{k}{6}\overline{p}$, где *k* принимает значения, равные *1,2,3,4* и *5*, а вектор $\overline{p}$ сохраняет прежний смысл в группе *p6*.

Аналогично из групп *p112/m, p4/m* и *p6/m* выводится по одной асимморфной группе $p112_1/m$, $p4_2/m$ и $p6_3/m$, а из групп *pmm2*, *p4mm* и *p6mm* также выводится только по одной асимморфной группе $pmc2_1$, $p4_2mc$ и $p6_3mc$, ибо при превращении, например, в группе *p4mm* поворотной оси 4 в винтовую ось 4_2, за счет добавления ей параллельного переноса $\frac{2}{4}\overline{p}$, одна из двух плоскостей, расположенных под углом в 45^{O} и проходящих через ось группы *p4mm*, превращается в плоскость скользящего отражения с вектором скольжения $\overline{p}/2$, где $\overline{p}$ по-прежнему вектор основного переноса, лежащий на оси группы *p4mm*.

В свою очередь, из групп *pmmm*, *p4/mmm* и *p6/mmm* выводится по одной асимморфной группе *pmcm,* $p4_2/mmc$ и $p6_3mmc$, а из группы *p222* – также одна асимморфная группа $p222_1$, в которой винтовая ось

2_1 получена из поворотной оси *2*, направленной по оси группы *p222*, за счет присоединения ей параллельного переноса на вектор $\frac{1}{2}\overline{p}$, где $\overline{p}$ – основной перенос группы *p222*, лежащий на её оси.

Аналогичным образом из симморфной группы *p32* выводится одна пара энантиоморфных асимморфных групп $p3_12$ и $p3_22$, а из группы *p422* выводятся три асимморфные группы $p4_122$, $p4_222$ и $p4_322$, среди которых группы $p4_122$ и $p4_322$ составляют энантиоморфную пару.

Наконец, из симморфной группы *p622* выводятся пять асимморфных групп $p6_122$, $p6_222$, $p6_322$, $p6_422$ и $p6_522$, среди которых имеется две различные энантиоморфные пары $p6_122$ и $p6_522$, а также $p6_222$ и $p6_422$.

В итоге имеем, что из выписанных *17* симморфных стержневых групп выводится 23 асимморфных. Но ввиду различия правых и левых винтовых осей, *8* асимморфных групп повторяются дважды. Встречаются именно такие стержневые группы *G* и $G^{/}$, отличающиеся между собой только за счет правизны и левизны винтовых осей, в которых правые и левые винтовые оси не переходят друг в друга собственным аффинным преобразованием *A*, связывающим эти группы, то есть в формуле $G^{/} = AGA^{-1}$ аффинное преобразование *A* собственное, и неодинаковых трёхмерных линейных кристаллографических групп симметрии насчитывается ровно *31*, а всех стержневых кристаллографических групп симметрии имеется *75*, из которых *36* неизоморфны, а *67* различны между собой без учета энантиоморфизма среди *75* стержневых групп симметрии [8,9].

Из способа вывода асимморфных стержневых групп из таких же симморфных следует, что ориентировка элементов симметрии в асимморфных стержневых группах, записанных в интернациональной символике, по отношению друг к другу такая же, как и в соответствующих симморфных группах, из которых они получены (ср.[5]).

Таким образом, список *31* трехмерной асимморфной кристаллографической линейной группы симметрии в интернациональной символике следующий: $p2_1$; $p3_1$, $p3_2$; $p4_1$, $p4_2$, $p4_3$; $p6_1$, $p6_2$, $p6_3$, $p6_4$, $p6_5$; $p112_1/m$; $p4_2/m$; $p6_3/m$; $pmc2_1$; $p4_2mc$; $p6_3mc$; *pmcm*; $p4_2/mmc$; $p6_3/mmc$; $p222_1$; $p3_12$, $p3_22$; $p4_122$, $p4_222$, $p4_322$; $p6_122$, $p6_222$, $p6_322$, $p6_422$, $p6_522$, из которых группы $p3_1$ и $p3_2$, $p4_1$ и $p4_3$, $p6_1$ и $p6_5$, $p6_2$ и $p6_4$, $p3_12$ и $p3_22$, $p4_122$ и $p4_32$, $p6_122$ и $p6_522$, $p6_222$ и $p6_422$ составляют *8* различных энантиоморфных пар, смысл которых объясняется следующим образом. Рассмотрим, например, энантиоморфную пару групп $p4_1$ и $p4_3$. В группе $p4_1$ винтовая ось 4_1 точку общего положения, расположенную в начале основного вектора переноса $\overline{p}$, поднимает на 1/4 этого вектора, а винтовая ось 4_3 в группе $p4_3$ эквивалентную ей точку по отношению переноса её на основной вектор $\overline{p}$, расположенную в конце этого вектора, опускает на вектор $-\frac{3}{4}\overline{p}$ и эквивалентные точки, расположенные в начале и в конце основного вектора $\overline{p}$, группы $p4_1$ и $p4_3$ располагают эти точки на одном и том же уровне, равном $\frac{1}{4}\overline{p}$ основного вектора переноса, и т.д.

Что касается розеточных *P*-симметрий, с помощью которых будут обобщаться асимморфные стержневые группы симметрии, то они впервые выведены в [10, с.95] при геометрическом способе классификации *P*-симметрий, когда группа подстановок *P* изоморфна каждой из *10* двумерных кристаллографических точечных групп симметрии G_{20}, исчерпываются *p*- и (*p*/)- симметрией при *p = 1,2,3,4,6* [11], а группы подстановок *P*, характеризующих эти *P*-симметрии, распределяются по *9* классам сильной изоморфности следующим образом: *1; 2, 1/ ; 3; 4; 6; 2/; 3/; 4/; 6/* (ср. [5,6]).

3. Основываясь на вышесказанном, приступим к решению поставленной задачи. Расширим сначала выписанные трёхмерные асимморфные линейные группы симметрии *S* с отмеченными розеточными *P*-симметриями при $P\Box G_{20}$ и обозначим их буквой *G*. Такие группы, как отмечено в [12], делятся на порождающие, старшие, младшие и *Q*- средние.

Группы *G* при *1*-симметрии совпадают с исходными группами симметрии *S* и называются порождающими, так как каждой точке этой фигуры приписывается один и тот же индекс, отчего не меняется группа симметрии *S* "индексированной" таким образом её фигуры.

Вывод старших групп *G*, связанных с нетривиальной группой *P*, задающей данную *P*-симметрию, правилен: *P = S□P,* где *S* – классическая (порождающая) группа симметрии рассматриваемой фигуры, *P*– группа подстановок индексов, характеризующая взятую *P*-симметрию, а × – символ прямого произведения групп *S* и *P*. В этом случае каждой точке фигуры с группой симметрии *S* приписывается один и тот же набор индексов, группа подстановок которых совпадает с группой *P*, определяющей рассматриваемую *P*-симметрию. Что касается группы *G* “индексированной” таким образом фигуры, то она содержит все преобразования группы *S* и все подстановки индексов группы *P*, а также всевозможные произведения элементов из группы *S* и группы *P* [12]. А это, как следует из [2], и говорит о том, что старшая группа *G* разлагается в прямое произведение групп *S* и *P*.

Младшие группы *G* выводятся из порождающих групп *S* только в том случае, если исходная группа *S* обладает таким нормальным делителем *H*, что фактор-группа $S / H \cong P$, задающей рассматриваемую *P*-симметрию. Практически младшие группы *G* могут быть получены из группы симметрии *S* поочередной заменой в полной системе её образующих элементов преобразований симметрии на соответствующие преобразования *P*-симметрии таким образом, чтобы совокупность P_1 подстановок индексов, входящих в группу *G* в качестве компонентов, совпала с группой *P*, а сами группы *G* и *S* были бы изоморфны [12] (метод Шубникова-Заморзаева). В этом случае каждая точка фигуры с группой симметрии S снабжается только одним индексом.

Наконец, *Q*-средние группы *G* выводятся из порождающей группы *S*, согласно основной теореме [12], только в том случае, если группа *S* обладает таким нормальным делителем *H*, а группа *P*, характеризующая рассматриваемую *P*-симметрию, обладает таким нетривиальным нормальным делителем *Q*, что фактор-группы *S/H* и *P/Q* изоморфны. В этом случае $Q = G \cap P$ служит погруппой *Q*-средней группы *G*, элементы которой являются *P*-тождественными преобразованиями группы *G*, то есть “индексированная” фигура, моделирующая группу *G*, переходит в себя при подстановке индексов, приписанных ее точкам при выводе *Q*-средних групп *G* из порождающей группы *S*.

Таким образом, изучение *Q*-средних групп *P*-симметрии *G*, где $Q = G \cap P$ есть подгруппа подстановок индексов в группе *G*, связано с перебиранием нетривиальных нормальных делителей группы подстановок *P*, задающей данную *P*–симметрию, а сам подсчет этих групп становится возможным, если предварительно выявлены младшие группы, ибо, как показано в [13], число различных *Q*–средних групп *P*–симметрии в данном семействе равно числу различных младших групп P_0–симметрии с той же порождающей, если фактор-группа *P/Q* изоморфна группе P_0. При этом в семействах групп изоморфных *P*–симметрий с общей порождающей совпадают не только числа различных младших, но и числа различных *Q*–средних групп. Это позволяет существенно сократить числовой обзор исследуемых групп, так как для подсчета асимморфных групп G_{31}^P розеточных *P*–симметрий нужно проделать подробное исследование не для всех *P*–симметрий, а для одной из каждого класса изоморфности. В настоящей работе используется такая возможность (ср.[5,6]).

Таким образом, при обобщении *31* трёхмерной асимморфной кристаллографической линейной группы симметрии с *10* выписанными в конце п.2 розеточными *P*–симметриями, получим *31* порождающую, *279* (31×9) старших, а также определённое число младших, выведенных нами из порождающих методом Шубникова-Заморзаева, и *Q*–средние группы для остальных семи нетривиальных случаев розеточных *P*–симметрий, ввиду того, что при *2*- и *3*-симметриях *Q*–средние группы не выводятся, ибо при этих *P*–симметриях группы подстановок 2 и 3, характеризующих их, не имеют нетривиальных нормальных делителей (ср.[5,6]). Смысл символики, используемой нами ниже при выписывании младших групп *P*–симметрии G_{31}^P при $p = 2, 3, 4, 6$, объяснен в [5, 6, 11, 12, 14], а сама группа *P*, задающая *p*–симметрию при $p = 2$, интерпретируется группой $P = \{1, 2\}$ изометрических преобразований пары симметричных друг другу относительно центра асимметричных точек с индексами *1* и *2*, при $p \geq 3$ – группой $P = \{(1,2, \ldots, p\})$ изометрических преобразований ориентированного правильного *p*-угольника, вершины которого занумерованы числами *1,2,3,…, p* [6].

4. Используя теоретические установки п.3 настоящей работы, приведем списки младших асимморфных стержневых групп *p*–симметрии при $p = 2, 3, 4, 6$ и число всевозможных *Q*– средних групп, порождаемых этими группами при отмеченных значениях *p*.

При *2*-симметрии список интересующих нас младших асимморфных групп G_{31}^{2} таков: $p2_1^{(2)}$; $p^{(2)}3_1$; $p^{(2)}3_2$; $p4_1^{(2)}$; $p4_2^{(2)}$, $p^{(2)}4_2 = p^{(2)}4_1$; $p^{(2)}4_2^{(2)} = p^{(2)}4_3$ (3 группы); $p4_3^{(2)}$; $p6_1^{(2)}$; $p6_2^{(2)}$, $p^{(2)}6_2 = p^{(2)}6_1$, $p^{(2)}6_2^{(2)} = p^{(2)}6_4$ (3 группы); $p6_3^{(2)}$; $p6_4^{(2)}$, $p^{(2)}6_4$, $p^{(2)}6_4^{(2)} = p^{(2)}6_5$ (3 группы); $p6_5^{(2)}$; $p112_1^{(2)}/m$, $p112_1/m^{(2)}$, $p112_1^{(2)}/m^{(2)}$ (3 группы); $p4_2^{(2)}/m$, $p4_2/m^{(2)}$, $p4_2^{(2)}/m^{(2)}$ (3 группы); $p6_3^{(2)}/m$, $p6_3/m^{(2)}$, $p6_3^{(2)}/m^{(2)}$ (3 группы); $pmc^{(2)}2_1^{(2)}$, $pm^{(2)}c^{(2)}2_1$, $pm^{(2)}c2_1^{(2)}$ (3 группы); $p4_2^{(2)}mc^{(2)}$, $p4_2m^{(2)}c^{(2)}$, $p4_2^{(2)}m^{(2)}c$ (3 группы); $p6_3^{(2)}mc^{(2)}$, $p6_3m^{(2)}c^{(2)}$, $p6_3^{(2)}m^{(2)}c$ (3 группы); $pm^{(2)}cm$, $pmc^{(2)}m$, $pmcm^{(2)}$, $pm^{(2)}c^{(2)}m$, $pm^{(2)}cm^{(2)}$, $pmc^{(2)}m^{(2)}$, $pm^{(2)}c^{(2)}m^{(2)}$ (7групп); $p4_2/m^{(2)}cm$, $p4_2/mc^{(2)}m^{(2)}$, $p4_2/m^{(2)}c^{(2)}m^{(2)}$, $p4_2^{(2)}/mc^{(2)}m$, $p4_2^{(2)}/mcm^{(2)}$, $p4_2^{(2)}/m^{(2)}c^2m$, $p4_2^{(2)}/m^{(2)}cm^{(2)}$ (7 групп); $p6_3/m^{(2)}cm$, $p6_3/mc^{(2)}m^{(2)}$, $p6_3/m^{(2)}c^{(2)}m^{(2)}$, $p6_3^{(2)}/mc^{(2)}m$, $p6_3^{(2)}/mcm^{(2)}$, $p6_3^{2}/m^{(2)}c^{(2)}m$, $p6_3^{(2)}/m^{(2)}cm^{(2)}$ (7 групп); $p2^{(2)}2^{(2)}2_1$, $p22^{(2)}2_1^{(2)}$ (2 группы); $p3_12^{(2)}$, $p^{(2)}3_12$ (2 группы); $p3_22^{(2)}$, $p^{(2)}3_22$ (2 группы); $p4_12^{(2)}2^{(2)}$, $p4_1^{(2)}22^{(2)}$ (2 группы); $p4_2^{(2)}22^{(2)}$, $p4_22^{(2)}2^{(2)}$, $p^{(2)}4_222 = p^{(2)}4_122$, $p^{(2)}4_2^{(2)}22^{(2)} = p^{(2)}4_322$ (4 группы); $p4_3^{(2)}22^{(2)}$, $p4_32^{(2)}2^{(2)}$ (2 группы); $p6_12^{(2)}2^{(2)}$, $p6_1^{(2)}22^{(2)}$ (2 группы); $p6_22^{(2)}2^{(2)}$, $p6_2^{(2)}22^{(2)}$, $p^{(2)}6_222 = p^{(2)}6_122$, $p^{(2)}6_2^{(2)}22^{(2)} = p^{(2)}6_422$ (4 группы); $p6_32^{(2)}2^{(2)}$, $p6_3^{(2)}22^{(2)}$ (2 группы); $p6_42^{(2)}2^{(2)}$, $p6_4^{(2)}22^{(2)}$, $p^{(2)}6_422 = p^{(2)}6_522$, $p^{(2)}6_4^{(2)}22^{(2)} = p^{(2)}6_222$ (4 группы); $p6_52^{(2)}2^{(2)}$, $p6_5^{(2)}22^{(2)}$ (2 группы). Нетрудно убедиться, что таких групп насчитывается ровно *84*. Этот результат не вызывает сомнений ввиду того, что младшие асимморфные группы G_{31}^{2} *2*–симметрии дублируют младшие асимморфные стержневые группы G_{31}^{1} антисимметрии, которых столько же (ср. с. 57 – 63 в [14]).

Заметим, что в полученном списке младших асимморфных групп категории G_{31}^{2} содержатся следующие *18* различных энантиоморфных пар: $p^{(2)}3_1$ и $p^{(2)}3_2$; $p4_1^{(2)}$ и $p4_3^{(2)}$; $p^{(2)}4_1$ и $p^{(2)}4_3$; $p6_1^{(2)}$ и $p6_5^{(2)}$; $p^{(2)}6_1$ и $p^{(2)}6_5$; $p6_2^{(2)}$ и $p6_4^{(2)}$; $p^{(2)}6_2$ и $p^{(2)}6_4$, $p3_12^{(2)}$ и $p3_22^{(2)}$; $p^{(2)}3_12$ и $p^{(2)}3_22$; $p4_12^{(2)}2^{(2)}$ и $p4_32^{(2)}2^{(2)}$; $p4_1^{(2)}22^{(2)}$ и $p4_3^{(2)}22^{(2)}$; $p^{(2)}4_122$ и $p^{(2)}4_322$; $p6_12^{(2)}2^{(2)}$ и $p6_52^{(2)}2^{(2)}$; $p6_1^{2}22^{(2)}$ и $p6_5^{2}22^{(2)}$; $p^{(2)}6_122$ и $p^{(2)}6_522$; $p6_22^{(2)}2^{(2)}$ и $p6_42^{(2)}2^{(2)}$; $p6_2^{(2)}22^{(2)}$ и $p6_4^{(2)}22^{(2)}$; $p^{(2)}6_222$ и $p^{(2)}6_422$. Удалив из списка *84* младших групп *2*-симметрии по одной группе из каждой пары энантиоморфных, получим, что различных без учета энантиоморфизма среди этих групп насчитывается только *66*. Следовательно, при *P*-симметриях из класса двух изоморфных *2* и 1/ насчитывается по *84 два* и (*1/*) – младших (всего 84 □2 = 168) с учетом энантиоморфизма и по *66 два* и (1/) младших (всего 66□2 = 132) без учета энантиоморфизма.

При *3*-симметрии только *14* асимморфных групп G_{31} ($p2_1$, $p3_1$, $p3_2$, $p4_1$, $p4_2$, $p4_3$, $p6_1$, $p6_2$, $p6_3$, $p6_4$, $p6_5$, $pmc2_1$, $p4_2mc$, и $p6_3mc$) порождают следующие *17* младших групп: $p^{(3)}2_1^{-3}$; $p3_1^{(3)}$; $p3_2^{(3)}$; $p^{(3)}4_1^{(3)}$; $p^{(3)}4_2^{(-3)}$; $p^{(3)}4_3^{(-3)}$; $p6_1^{(3)}$; $p6_2^{(3)}$; $p6_3^{(3)}$; $p^{(3)}6_3$; $p^{(3)}6_3^{(3)}$; $p^{(3)}6_3^{(-3)}$; $p6_4^{(3)}$; $p6_5^{(3)}$; $p^{(3)}mc^{(-3)}2_1^{(-3)}$; $p^{(3)}4_2^{(-3)}mc^{(3)}$ и $p^{(3)}6_3^{(-3)}mc^{(3)}$, среди которых находится 4 энантиоморфные пары $p3_1^{(3)}$ и $p3_2^{(3)}$; $p^{(3)}4_1^{(3)}$ и $p^{(3)}4_3^{(3)}$; $p6_1^{(3)}$ и $p6_5^{(3)}$ и $p6_2^{(3)}$ и $p6_4^{(2)}$. Таким образом, при *3*-симметрии имеется *17* младших асимморфных групп G_{31}^{3} с учетом энантиоморфизма и *13* (17 – 4) таких же групп без его учёта, что совпадает с результатом вывода младших стержневых асимморфных групп трёхцветной симметрии G_{31}^{3}, выписанных в символике А.М. Заморзаева на с.70-73 в [14].

При *4*-симметрии эти же *14* асимморфных групп G_{31} порождают следующие младшие асимморфные группы G_{31}^{4}: $p^{(2)}2_1^{(4)}$; $p^{(4)}3_1^{(-4)}$; $p^{(4)}3_2^{(4)}$; $p4_1^{(4)}$; $p4_2^{(4)}$, $p^{(2)}4_2^{(4)}$ (2 группы); $p4_3^{(4)}$; $p^{(2)}6_1^{(4)}$; $p^{(4)}6_2^{(4)}$, $p^{(4)}6_2^{(-4)}$ (2 группы); $p^{(2)}6_3^{(4)}$; $p^{(4)}6_4^{(4)}$, $p^{(4)}6_4^{(-4)}$ (2 группы); $p^{(2)}6_5^{(4)}$; $p^{(2)}mc^{(4)}2_1^{(-4)}$, $p^{(2)}m^{(2)}c^{(4)}2_1^{(4)}$ (2 группы); $p^{(2)}mc^{(4)}4_2^{(-4)}$, $p^{(2)}m^{(2)}c^{(4)}4_2^{(4)}$ (2 группы); $p^{(2)}mc^{(-4)}6_3^{(4)}$, $p^{(2)}m^{(2)}c^{(4)}6_3^{(4)}$ (2 группы), среди которых имеется четыре различных энантиоморфных пары $p^{(4)}3_1^{(-4)}$ и $p^{(4)}3_2^{(4)}$, $p4_1^{(4)}$ и $p4_3^{(4)}$, $p^{(2)}6_1^{(4)}$ и $p^{(2)}6_5^{(4)}$, $p^{(4)}6_2^{(4)}$ и $p^{(2)}6_4^{(4)}$. Следовательно, при *4*–симметрии имеется *20* младших асимморфных групп G_{31}^{4} с учетом энантиоморфизма и *16* (20–4) таких же групп без учета энантиоморфизма. Полученные результаты совпадают с результатами вывода младших стержневых асимморфных групп четырёхцветной симметрии G_{31}^{4}, представленных в символике А.М. Заморзаева на стр.70-73 в [14].

Далее, в связи с тем, что группа *4*, задающая *4*-симметрию, имеет нетривиальный нормальный делитель *2*, то кроме младших при *4*-симметрии порождаются *84 два*-средних с учетом энантиоморфизма, либо *66* таких же групп без учета энантиоморфизма, ввиду того, что фактор-группа $4/2 \square 2$. Следовательно, число *2*-средних групп при *4*-симметрии должно совпасть, согласно [13], с числом младших асимморфных стержневых групп при *2*-симметрии.

В итоге имеем, что рассматриваемые нами *14* асимморфных групп категории G_{31} порождают при *4*-симметрии *104* различных группы с учётом энантиоморфизма, из которых *20* младших и *84 два*-средних, либо *82* различных группы без учёта энантиоморфизма, из которых *16* младших и *66 два*-средних.

Наконец, эти же *14* асимморфных групп G_{31}, обладающих младшими при *3*- и *4*-симметрии, порождают также младшие группы и при *6*-симметрии. Список этих групп выглядит следующим образом: $p^{(3)}2_1^{(6)}$; $p^{(2)}3_1^{(6)}$; $p^{(2)}3_2^{(6)}$; $p^{(3)}4_1^{(-6)}$; $p^{(3)}4_2^{(6)}$; $p^{(6)}4_2^{(3)}$, $p^{(6)}4_2^{(-6)}$ (3 группы); $p^{(3)}4_3^{(6)}$; $p6_1^{(6)}$; $p6_2^{(6)}$; $p^{(2)}6_2^{(3)}$, $p^{(2)}6_2^{(6)}$ (3 группы); $p6_3^{(6)}$, $p^{(3)}6_3^{(2)}$, $p^{(3)}6_3^{(6)}$, $p^{(3)}6_3^{(-6)}$ (4 группы); $p6_4^{(6)}$, $p^{(2)}6_4^{(3)}$, $p^{(2)}6_4^{(6)}$ (3 руппы); $p6_5^{(6)}$; $p^{(3)}mc^{(6)}2_1^{(-6)}$, $p^{(3)}m^{(2)}c^{(6)}2_1^{(-3)}$, $p^{(3)}m^{(2)}c^{(-3)}2_1^{(6)}$ (3 группы); $p^{(3}mc^{(-6)}4_2^{(6)}$, $p^{(3}m^{(2)}c^{(6)}4_2^{(-3)}$, $p^{(3)}m^{(2)}c^{(-3)}4_2^{(6)}$ (3 группы); $p^{(3)}mc^{(6)}6_3^{(-6)}$, $p^{(3)}m^{(2)}c^{(6)}6_3^{(-3)}$, $p^{(3)}m^{(2)}c^{(-3)}6_3^{(6)}$ (3 группы). В их число входит уже шесть различных энантиоморфных пар групп $p^{(2)}3_1^{(6)}$ и $p^{(2)}3_2^{(6)}$, $p^{(3)}4_1^{(-6)}$ и $p^{(3)}4_3^{(6)}$, $p6_1^{(6)}$ и $p6_5^{(6)}$, $p6_2^{(6)}$ и $p6_4^{(6)}$, $p^{(2)}6_2^{(3)}$ и $p^{(2)}6_4^{(3)}$, $p^{(2)}6_2^{(6)}$ и $p^{(2)}6_4^{(6)}$. Оставив в списке полученных младших *29* асимморфных групп G_{31}^{6} по одной группе из каждой отмеченной пары энантиоморфных, получим *23* (29-6) различные младшие асимморфные группы *6*-симметрии без учета энантиоморфизма. Выписанные результаты совпадают с числом различных младших асимморфных стержневых групп G_{31}^{6} шестицветной симметрии, выписанных на с. 70-73 в [14] в символике А.М. Заморзаева.

Отметим, что кроме выписанных младших, указанные асимморфные группы G_{31} порождают *2*- и *3*-средние группы, так как группа *6*, задающая *6*-симметрию, имеет два нетривиальных нормальных делителя $Q_1 = 2$ и $Q_2 = 3$. При этом, число *2*-средних групп совпадает с числом *17* младших асимморфных групп с учетом энантиоморфизма, либо с числом *13* младших таких же групп без учета энантиоморфизма при *3*-симметрии вследствие того, что фактор-группа $6/2 \square 3$, а число *3*-средних групп совпадает с числом *84* младших асимморфных стержневых групп с учетом энантиоморфизма, либо с числом *66* таких же групп без учета энантиоморфизма при *2*-симметрии ввиду того, что фактор-группа $6/2 \square 3$ [13].

Таким образом, при *6*-симметрии различается *130* асимморфных стержневых групп с учетом энантиоморфизма, из которых *29* младших и *101 Q*-средняя, а без учета энантиоморфизма таких групп только *102*, среди которых *23* младших и *79 Q*-средних,

Суммируя перечисленные выше результаты вывода младших и подсчета *Q*-средних групп *p*- и (*1/*)-симметрии при $p = 2, 3, 4$, и *6* из *31* асимморфной стержневой группы G_{31}, получим *419* различных с учетом энантиоморфизма групп, из которых *234* младших и *185 Q*-средних, либо *329* таких же различных групп без учета энантиоморфизма, из которых *184* младших и *145 Q*-средних.

5. Опираясь также на теоретические положения п.3 настоящей работы, приступим к выводу младших и подсчёту *Q*-средних асимморфных групп (*p/*)-симметрии $G_{31}^{P/}$ при $p = 2, 3, 4, 6,$ являющихся составной частью разеточных *P*-симметрий, представленных в конце п.2 настоящей работы. Смысл символики, используемой при выписывании младших групп (*p/*)-симметрии $G_{31}^{P/}$ при отмеченных значениях *p*, объяснен в [5,6,15]. Сама же группа *P*, задающая (*p/*)-симметрию, интерпретируется группой изометрических преобразований равноугольно–полуправильного *2p*–угольника, вершины которого занумерованы индексами *1,2…,p* и $\overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{p}$ таким образом, что в данном случае группа $P = \{(1,2,...,p)\ (\overline{p},...,\overline{2},\overline{1}),(1,\overline{1})(2,\overline{2})...(p,\overline{p})\}$ [15].

При (*2/*)-симметрии рассматриваемые нами трёхмерные асимморфные линейные группы G_{31} порождают следующие младшие группы: $p^{(2}4_2^{/)}$, $p^{/)}4_2^{(2}$, $p^{(2'}4_2^{/)}$ (3 группы); $p^{(2}6_2^{/)}$, $p^{/)}6_2^{(2}$, $p^{(2'}6_2^{/)}$ (3 группы);

$p^{(2}6_4^{/)}$, $p^{/)}6_4^{2)}$, $p^{(2'}6_4^{/)}$ (3 группы) $p112_1^{(2}/m^{/)}$, $p112_1^{/)}/m^{(2}$, $p112_1^{(2'}/m^{/)}$ (3 группы); $p4_2^{(2}/m^{/)}$, $p4_2^{/)}/m^{(2}$, $p4_2^{(2'}/m^{/)}$ (3 группы); $p6_3^{(2}/m^{/)}$, $p6_3^{/)}/m^{2)}$, $p6_3^{(2'}/m^{/)}$ (3 группы), $pm^{(2}c^{/)}2_1^{(2'}$, $pm^{/)}c^{(2}2_1^{(2'}$, $pm^{(2'}c^{/)}2_1^{(2}$ (3 группы); $p4_2^{(2'}m^{(2}c^{/)}$, $p4_2^{(2'}m^{/)}c^{(2}$, $p4_2^{(2}m^{(2'}c^{/)}$ (3 группы); $p6_3^{(2'}m^{(2}c^{/)}$, $p6_3^{(2'}m^{/)}c^{(2}$, $p6_3^{(2}m^{(2'}c^{/)}$ (3 группы); $pm^{/)}c^{/)}m^{(2}$, $pm^{(2}c^{(2}m^{/)}$, $pm^{(2'}c^{(2'}m^{(2}$ (3 группы), $pmc^{(2}m^{/)}$, $pmc^{/)}m^{(2}$, $pmc^{(2'}m^{(2}$(3 группы), $pm^{/)}c^{(2}c^{(2}$, $pm^{(2}c^{/)}m^{/)}$, $pm^{(2'}c^{(2}m^{(2}$ (3 группы), $pm^{(2}cm^{/)}$, $pm^{/)}cm^{(2}$, $pm^{(2'}cm^{(2}$(3 группы), $pm^{(2}c^{/)}m^{(2}$, $pm^{/)}c^{(2}m^{/)}$, $pm^{(2'}c^{(2}m^{(2'}$ (3 группы), $pm^{/)}c^{(2}m^{(2'}$, $pm^{(2}c^{/)}m^{(2'}$, $pm^{(2}c^{(2'}m^{/)}$ (3 группы), $pm^{(2}c^{/)}m$, $pm^{/)}c^{(2}m$, $pm^{(2'}c^{/)}m$ (3 группы); $p4_2/m^{(2}c^{/)}m^{1)}$, $p4_2/m^{/)}c^{(2}m^{(2}$, $p4_2/m^{(2'}c^{/)}m^{/)}$(3 группы); $p4_2^{(2}/m^{/)}c^{(2}m$, $p4_2^{/)}/m^{(2}c^{/)}m$, $p4_2^{/)}/m^{(2'}c^{/)}m$ (3 группы), $p4_2^{(2}/m^{/)}c^{(2'}m^{/)}$, $p4_2^{/)}/m^{(2}c^{(2'}m^{(2}$, $p4_2^{(2'}/m^{/)}c^{(2}m^{/)}$ (3 группы), $p4_2^{(2}/m^{/)}cm^{(2}$, $p4_2^{/)}/m^{(2}cm^{/)}$, $p4_2^{/)}/m^{(2'}cm^{/)}$ (3 группы); $p4_2^{(2}/m^{/)}cm^{(2}$, $p4_2^{/)}/m^{(2}cm^{/)}$, $p4_2^{/)}/m^{(2'}cm^{/)}$ (3группы), $p4_2^{(2}/mc^{/)}m^{(2'}$, $p4_2^{/)}/mc^{(2}m^{(2'}$, $p4_2^{(2'}/mc^{/)}m^{(2}$ (3 группы), $p4_2^{(2}/m^{(2}c^{/)}m^{(2'}$, $p4_2^{/)}/m^{/)}c^{(2'}m^{(2}$, $p4_2^{/)}/m^{/)}c^{(2}m^{(2'}$ (3 группы); $p6_3/m^{(2}c^{/)}m^{/)}$, $p6_3/m^{/)}c^{(2}m^{(2}$, $p6_3/m^{(2'}c^{/)}m^{/)}$ (3 группы), $p6_3^{(2}/m^{/)}c^{(2}m$, $p6_3^{/)}/m^{(2}c^{/)}m$, $p6_3^{/)}/m^{(2'}c^{/)}m$ (3 группы), $p6_3^{(2}/m^{/)}c^{(2'}m^{/)}$, $p6_3^{/)}/m^{(2}c^{(2'}m^{(2}$, $p6_3^{(2'}/m^{/)}c^{(2}m^{/)}$ (3 группы), $p6_3^{(2}/m^{/)}cm^{(2}$, $p6_3^{/)}/m^{(2}cm^{/)}$, $p6_3^{/)}/m^{(2'}cm^{/)}$ (3 группы), $p6_3^{(2}/m^{/)}cm^{(2}$, $p6_3^{/)}/m^{(2}cm^{/)}$, $p6_3^{/)}/m^{(2'}cm^{/)}$ (3 группы), $p6_3^{(2}/mc^{/)}m^{(2'}$, $p6_3^{/)}/mc^{(2}m^{(2'}$, $p6_3^{(2'}/mc^{/)}m^{(2}$ (3 группы), $p6_3^{(2}/m^{(2}c^{/)}m^{(2'}$, $p6_3^{/)}/m^{/)}c^{(2'}m^{(2}$, $p6_3^{/)}/m^{/)}c^{(2}m^{(2'}$ (3 группы); $p2^{(2}2^{/)}2_1^{2'}$, $p2^{/)}2^{(2'}2_1^{2}$ (2 группы); $p^{(2}3_12^{/)}$, $p^{/)}3_12^{(2}$ (2 группы); $p^{(2}3_22^{/)}$, $p^{/)}3_22^{(2}$ (2 группы); $p4_1^{(2}2^{/)}2^{(2'}$, $p4_1^{/)}2^{(2}2^{(2'}$ (2 группы); $p4_2^{(2}2^{/)}2^{(2'}$, $p4_2^{/)}2^{(2}2^{(2'}$ (2 группы), $p^{(2}4_22^{/)}2^{/)}$, $p^{(2'}4_22^{(2}2^{(2}$ (2 группы), $p^{(2}4_2^{(2}2^{/)}2^{(2'}$, $p^{/)}4_2^{/)}2^{(2'}2^{(2}$ (2 группы), $p^{(2}4_2^{/)}22^{/)}$, $p^{/)}4_2^{(2'}22^{(2'}$, $p^{(2'}4_2^{(2}22^{(2}$ (3 группы); $p4_3^{(2}2^{/)}2^{(2'}$, $p4_3^{/)}2^{(2}2^{(2'}$ (2 группы); $p6_1^{(2}2^{/)}2^{(2'}$, $p6_1^{/)}2^{(2}2^{(2'}$ (2 группы); $p6_2^{(2}2^{/)}2^{(2'}$, $p6_2^{/)}2^{2'}2^{(2}$ (2 группы), $p^{(2}6_22^{/)}2^{/)}$, $p^{(2'}6_22^{(2}2^{(2}$ (2 группы), $p^{(2}6_2^{(2}2^{/)}2^{(2'}$, $p^{/)}6_2^{/)}2^{(2'}2^{(2}$ (2 группы), $p^{(2}6_2^{/)}22^{/)}$, $p^{/)}6_2^{(2'}22^{(2'}$, $p^{(2'}6_2^{(2}22^{(2}$ (3 группы); $p6_3^{(2}2^{/)}2^{(2'}$, $p6_3^{/)}2^{(2}2^{(2'}$ (2 группы); $p6_4^{(2}2^{/)}2^{(2'}$, $p6_4^{/)}2^{(2'}2^{(2}$ (2 группы), $p^{(2}6_42^{/)}2^{/)}$, $p^{(2'}6_42^{(2}2^{(2}$ (2 группы), $p^{(2}6_4^{(2}2^{/)}2^{(2'}$, $p^{/)}6_4^{1)}2^{(2'}2^{(2}$ (2 группы), $p^{(2}6_4^{/)}22^{/)}$, $p^{/)}6_4^{(2'}22^{(2'}$, $p^{(2'}6_4^{2}22^{(2}$ (3 группы); $p6_5^{(2}2^{/)}2^{(2'}$, $p6_5^{/)}2^{(2}2^{(2'}$ (2 группы).

Из приведенного перечня следует, что восемь асимморфных групп G_{31} $p2_1$, $p3_1$, $p3_2$, $p4_1$, $p4_3$, $p6_1$, $p6_3$, $p6_5$ не порождают младшие (*2/*)-симметрии, а остальные *23* асимморфные группы G_{31} порождают *133* таких группы, среди которых *18 пар* энантиоморфны: $p^{(2}6_2^{/)}$ и $p^{(2}6_4^{/)}$, $p^{/)}6_2^{(2}$ и $p^{/)}6_4^{2}$, $p^{(2'}6_2^{/)}$ и $p^{(2'}6_4^{/)}$; $p^{(2}3_12^{/)}$ и $p^{(2}3_22^{/)}$, $p^{/)}3_12^{(2}$ и $p^{/)}3_22^{(2}$; $p4_1^{(2}2^{/)}2^{(2'}$ и $p4_3^{(2}2^{/)}2^{(2'}$, $p4_1^{/)}2^{(2}2^{(2'}$ и $p4_3^{/)}2^{(2}2^{(2'}$, $p6_1^{(2}2^{/)}2^{(2'}$ и $p6_5^{(2}2^{/)}2^{(2'}$, $p6_1^{/)}2^{(2}2^{(2'}$ и $p6_5^{/)}2^{(2}2^{(2'}$; $p6_2^{(2}2^{/)}2^{(2'}$ и $p6_4^{(2}2^{/)}2^{(2'}$, $p6_2^{/)}2^{(2'}2^{(2}$ и $p6_4^{/)}2^{(2'}2^{(2}$, $p^{(2}6_22^{/)}2^{/)}$ и $p^{(2}6_42^{/)}2^{/)}$, $p^{(2'}6_22^{(2}2^{(2}$ и $p^{(2'}6_42^{(2}2^{(2}$, $p^{(2}6_2^{(2}2^{/)}2^{(2'}$ и $p^{(2}6_4^{(2}2^{/)}2^{(2'}$, $p^{/)}6_2^{/)}2^{(2'}2^{(2}$ и $p^{/)}6_4^{/)}2^{(2'}2^{(2}$, $p^{(2}6_2^{/)}22^{/)}$ и $p^{(2}6_4^{/)}22^{/)}$, $p^{/)}6_2^{(2'}22^{(2'}$ и $p^{/)}6_4^{(2'}22^{(2'}$, $p^{(2'}6_2^{(2}22^{(2}$ и $p^{(2'}6_4^{(2}22^{(2}$. Если из каждой пары различных энантиоморфных групп в списке *133* младших (*2/*)-симметрий удалить по одной, то окажется, что различных младших асимморфных групп (2/)-симметрии $G_{31}^{P/}$ без учета энантиоморфизма только *115* (133-18). Таким образом, *23* трехмерные линейные асимморфные группы G_{31} из *31* порождают *133* младших группы (*2/*)-симметрии с учетом энантиоморфизма и *115* таких же групп без учета энантиоморфизма.

Далее, так как группа *P*, задающая (*2/*)-симметрию, имеет два нетривиальных нормальных делителя $Q_1 = 2$ и $Q_2 = 1/$, то рассматриваемые нами асимморфные группы G_{31} при (*2/*)-симметрии, кроме выписанных младших, порождают *84 два*-средние группы с учётом энантиоморфизма и 66 таких групп без его учёта, ввиду того, что фактор-группа (2/)/2 □ 1/ и *84 (1/)*-средних с учетом энантиоморфизма и *66* таких же групп без его учета, так как фактор -группа (2/)/(1/) □ 2. Следовательно, при *(2/)*-симметрии насчитывается *168* (84□2) *Q*-средних асимморфных групп с учетом энантиоморфизма и *132* (66□2) таких же группы без его учета.

В итоге из всего сказанного выше следует, что при *(2/)*-симметрии различается *301* асимморфная группа $G_{31}^{2/}$, из которых *133* младших и *168 Q*-средних с учетом энантиоморфизма, и *247* таких групп без его учета, среди которых *115* младших и *132 Q*-средних.

При (*3/*)-симметрии *18* трехмерных линейных асимморфных групп G_{31} $p112_1/m$, $p4_2/m$, $p6_3/m$, $p6_3mc$, $pmcm$, $p4_2/mmc$, $p6_3/mmc$, $p222_1$, $p3_12$, $p3_22$, $p4_122$, $p4_222$, $p4_322$, $p6_122$, $p6_222$, $p6_322$, $p6_422$, $p6_522$ порождают последовательно следующие *22* младшие группы $p^{(3}112_1^{(-3}/m^{/)}$; $p^{(3}4_2^{(-3}/m^{/)}$; $p^{(3}6_3^{(-3}/m^{/)}$; $p6_3^{(3}m^{/)}c^{//)}$; $p^{(3}mc^{(-3}m^{/)}$; $p^{(3}4_2^{(-3}/m^{/)}mc^{(-3}$; $p6_3^{(3}/mm^{/)}c^{//)}$, $p^{(3}6_3^{(-3}/m^{/)}mc^{(-3}$; $p^{(-3}2^{/)}2^{//)}2_1^{(3}$; $p3_1^{(3}2^{/)}$; $p3_2^{(3}2^{/}$; $p^{(3}4_1^{(3}2^{/)}2^{//)}$; $p^{(-3}4_2^{(3}2^{/)}2^{//)}$, $p^{(-3}4_3^{(3}2^{/)}2^{//)}$; $p6_1^{(3}2^{/)}2^{//)}$; $p6_2^{(3}2^{/)}2^{//)}$; $p6_3^{(3}2^{/)}2^{//)}$, $p^{(3}6_32^{/)}2^{/)}$, $p^{(3}6_3^{(3}2^{/)}2^{//)}$, $p^{(3}6_3^{(-3}2^{/)}2^{///)}$; $p6_4^{(3}2^{/)}2^{//)}$; $p6_5^{(3}2^{/)}2^{//)}$, полностью совпадающие с младшими асимморфными группами $G_{31}^{3/}$, выписанными еще в 1980 году в [15]. В этой же работе [15] на рис.*а* (с. 59) проиллюстрирован смысл знаков (3, (-3, $^{/)}$, $^{//)}$, $^{///)}$, приписанных элементам порождающих асимморфных групп категории G_{31} при их обобщении с (*3/*)-симметрией (см.также [6]).

Среди выписанных *22* младших трехмерных линейных асимморфных групп (*3/*)- симметрии четыре пары групп $p3_1^{(3}2^{/)}$ и $p3_2^{(3}2^{/)}$, $p^{(3}4_1^{(3}2^{/)}2^{//)}$ и $p^{(-3}4_3^{(3}2^{/)}2^{//)}$, $p6_1^{(3}2^{/)}2^{//)}$ и $p6_5^{(3}2^{/)}2^{//)}$, $p6_2^{(3}2^{/)}2^{//)}$ и $p6_4^{(3}2^{/)}2^{//)}$ различаются между собой только за счет энантиоморфизма. Следовательно, различных без учета энантиоморфизма младших асимморфных стержневых групп (*3/*)-симметрии имеется только *18* (22 – 4). Далее, так как группа *P*, задающая (*3/*)-симметрию, обладает нетривиальным нормальным делителем *Q = 3*, то рассматриваемые нами асимморфные стержневые группы G_{31}, кроме выписанных младших, порождают еще *84 три*-средние с учетом энантиоморфизма и *66* таких групп без его учета, ибо фактор-группа (3/)/3 □ 1/.

Таким образом, при обобщении выписанных *18* трёхмерных линейных асимморфных групп с (3/)-симметрией получаем *106* различных новых групп с учетом энантиоморфизма, из которых *22*-младшие и *84 три*-средние, а без учета энантиоморфизма таких групп только *84* из которых *18* младших и *66 три*-средних.

При (*4/*)-симметрии из выписанных *18* стержневых асимморфных групп, порождающих младшие группы при (*3/*)-симметрии, только из одной группы $p6_3mc$ не выводятся младшие. Остальные *17* групп порождают следующие младшие группы (*4/*)-симметрии: $p^{(2}112_1^{(4}/m^{/)}$;

$$p4_2^{(4}/m^{/)}, p^{(2}4_2^{(4}/m^{/)};\ p^{(2}6_3^{(4}/m^{/)};\ p^{(2}mc^{(4}m^{/)}, p^{(2}m^{(2}c^{(4}m^{/)};\ p4_2^{(4}/mm^{/)}c^{//)}, p4_2^{(4}/m^{(2}m^{/)}m^{//)},$$
$$p^{(2}4_2^{(4}/m^{/)}mc^{(4},\ p^{(2}4_2^{(4}/m^{/)}m^{(2}c^{(-4};\ p^{(2}6_3^{(4}/m^{/)}mc^{(4},\ p^{(2}6_3^{(4}/m^{/)}m^{(2}c^{(-4};\ p^{(2}2^{/)}2^{//)}2_1^{(4};\ p^{(4}3_1^{(-4}2^{/)};$$
$$p^{(4}3_2^{(4}2^{/)};\ p4_1^{(4}2^{/)}2^{//)};\ p4_2^{(4}2^{/)}2^{//)}, p^{(2}4_2^{(4}2^{/)}2^{//)};\ p4_3^{(4}2^{/)}2^{//)};\ p^{(2}6_1^{(4}2^{/)}2^{//)};\ p^{(4}6_2^{(4}2^{/)}2^{//)},\ p^{(4}6_2^{(-4}2^{/)}2^{///)};$$

$p^{(2}6_3^{(4}2^{/)}2^{//)}$; $p^{(4}6_4^{(4}2^{/)}2^{//)}$, $p^{(4}6_4^{(-4}2^{/)}2^{///)}$; $p^{(2}6_5^{(4}2^{/)}2^{//)}$, полностью совпадающие с такими же *26* различными младшими асимморфными стержневыми группами (*4/*)-симметрии, представленными еще в 1980 году в [15]. Там же на рис.б (с. 59) изображен смысл приписываемых образующим элементам порождающих групп знаков (4, (-4, (2, $^{/)}$, $^{//)}$, $^{///)}$при их обобщении с (*4/*)-симметрией (см. также [6]).

В перечне выписанных младших стержневых асимморфных групп (*4/*)-симметрии пары групп $p^{(4}3_1^{(-4}2^{/)}$ и $p^{(4}3_2^{(4}2^{/)}$, $p4_1^{(4}2^{/)}2^{//)}$ и $p4_3^{(4}2^{/)}2^{//)}$, $p^{(2}6_1^{(4}2^{/)}2^{//)}$и $p^{(4}6_5^{(2}2^{/)}2^{//)}$, $p^{(4}6_2^{(4}2^{/)}2^{//)}$ и $p^{(4}6_4^{(4}2^{/)}2^{//)}$, $p^{(4}6_2^{(-4}2^{/)}2^{///)}$ и $p^{(4}6_4^{(-4}2^{/)}2^{///)}$различаются между собой только за счет энантиоморфизма. Следовательно, различных младших асимморфных стержневых групп (*4/*)-симметрии без учета энантиоморфизма имеется только *21* (26 –5).

Ввиду того, что группа *P*, задающая (*4/*)-симметрию, имеет три нетривиальных нормальных делителя $Q_1 = 4$, $Q_2 = 2/$ и $Q_3 = 2$, то кроме младших, асимморфные стержневые группы порождают также *84 четыре*-средние с учетом энантиоморфизма и *66* таких групп без учета энантиоморфизма, так как фактор-группа (4/)/4 □ 1/ , *84 (2/*)-средние с учетом энантиоморфизма и *66* таких же групп без его учета, ибо фактор-группа (4/)/(2/) □ 2, а также *133 две*-средние с учетом энантиоморфизма и *115* таких групп без его учёта, ввиду того, что фактор-группа (4/)/2□ 2/.

Таким образом, рассматриваемые нами асимморфные стержневые группы G_{31} порождают при (*4/*)-симметрии *327* новых групп с учетом энантиоморфизма, из которых *26* младших и *301* *Q*-средняя, а без учета энантиоморфизма таких групп насчитывается *268*, из которых *21* младшая и *247* *Q*-средних.

Все асимморфные стержневые группы, дающие *22* младшие с учетом энантиоморфизма при (*3/*)-симметрии, порождают последовательно следующие младшие группы (*6/*)-симметрии:

$$p^{(3}112_1^{(6}/m^{/)};\ p^{(3}4_2^{(6}/m^{/)};\ p^{(3}6_3^{(6}/m^{/)};\ p6^{(6}m^{/)}c^{//)};\ p^{(3}m^{(2}c^{(-3}m^{/)},\ p^{(3}mc^{(6}m^{/)},\ \ p^{(3}m^{(2}c^{(6}m^{/)};$$

$$p^{(3}4_2^{(6}/m^{/)}mc^{(6},\ p^{(3}4_2^{(6}/m^{/)}m^{(2}c^{(-3},\ p^{(3}4_2^{(-3}/m^{/)}m^{(2}c^{(6};\ p6_3^{(6}/mm^{/)}c^{//)},\ p6_3^{(3}/m^{(2}m^{/)}m^{IV)},\ p6_3^{(6}/m^{(2}m^{/)}m^{//)},$$

$$p^{(3}6_3^{(6}/m^{/)}mc^{(6},\ p^{(3}6_3^{(-3}/m^{/)}m^{(2}c^{(6},\ p^{(3}6_3^{(6}/m^{/)}m^{(2}c^{(-3};\ p^{(3}2^{/)}2^{//)}2_1^{(6};\ p^{(2}3_1^{(6}2^{/)};\ p^{(2}3_2^{(6}2^{/)};\ p^{(3}4_1^{(-6}2^{/)}2^{///)};\ p^{(3}4_2^{(6}2^{/)}2^{//)},$$

$$p^{(6}4_2^{(3}2^{/)}2^{IV)},\ p^{(6}4_2^{(-6}2^{/)}2^{///)};\ p^{(3}4_3^{(6}2^{/)}2^{//)};\ p6_1^{(6}2^{/)}2^{//)};\ p6_2^{(6}2^{/)}2^{//)},\ p^{(2}6_2^{(3}2^{/)}2^{IV)},\ p^{(2}6_2^{(6}2^{/)}2^{//)};\ p^{(2}6_3^{(6}2^{/)}2^{//)},$$

$$p^{(3}6_3^{(2}2^{/)}2^{(2'},\ p^{(3}6_3^{(6}2^{/)}2^{//)},\ p^{(3}6_3^{(-6}2^{/)}2^{///)};\ p6_4^{(6}2^{/)}2^{//)},\ p^{(2}6_4^{(3}2^{/)}2^{IV)},\ p^{(2}6_4^{(6}2^{/)}2^{//)};\ p6_5^{(6}2^{/)}2^{//)},$$

полностью совпадающие с *36* младшими асимморфными стержневыми группами (*6/*)-симметрии из *38*, представленных в [15] еще в 1980 году. Тщательный анализ младших асимморфных стержневых групп (*6/*)-симметрии из [15] показал, что две группы $p^{(6}4_2^{(3}/m^{/}$ и $p^{(6}4_2^{(-6}/m^{/)}$ из трёх с порождающей $p4_2/m$ не являются младшими. В этой же работе [15] на рис. *в* (с.59) с помощью отражений от осей симметрии равноугольно-полуправильного 12-угольника показана схема подстановок индексов вершин 1, 2,…, 6 и $\overline{1},\overline{2},...,\overline{6}$ этого многоугольника, обозначенных символами $^{/)}$, $^{//)}$, $^{///)}$, $^{IV)}$, $^{V)}$ и $(2^{/}$, приписываемых образующим элементам порождающих групп при их обощении с (*6/*)-симметрией (см. также [6], где отмечен смысл символов (6, (-6; (3 и (-3.

Среди выписанных *36* младших линейных асимморфных групп (*6/*)-симметрии 6 пар групп $p^{(2}3_1^{(6}2^{/)}$ и $p^{(2}3_2^{(6}2^{/)}$, $p^{(3}4_1^{(-6}2^{/)}2^{///)}$ и $p^{(3}4_3^{(6}2^{/)}2^{//)}$, $p6_1^{(6}2^{/)}2^{//)}$ и $p6_5^{(6}2^{/)}2^{//)}$, $p6_2^{(6}2^{/)}2^{//)}$ и $p6_4^{(6}2^{/)}2^{//)}$, $p^{(2}6_2^{(3}2^{/)}2^{IV)}$ и $p^{(2}6_4^{(3}2^{/)}2^{IV)}$, $p^{(2}6_2^{(6}2^{/)}2^{//)}$ и $p^{(2}6_4^{(6}2^{/)}2^{//)}$ различаются между собой только за счет энантиоморфизма. А это говорит о том, что различных младших стержневых асимморфных групп (*6/*)-симметрии без учета энантиоморфизма насчитывается только *30* (36 – 6).

Далее, так как группа *P*, задающая (*6/*)-симметрию, обладает четырьмя нетривиальными нормальными делителями $Q_1 = 2$, $Q_2 = 3$, $Q_3 = 6$ и $Q_4 = 3/$, то кроме выписанных младших стержневых асимморфных групп различаются *22* *два*-средние группы (*6/*)-симметрии с учетом энантиоморфизма и *18* таких групп без его учёта, ввиду того, что фактор группа (6/)/3 $\sqcup$ 3/; *133* *три*–средние группы *(6/)*-симметрии с учетом энантиоморфизма и *115* таких групп без его учета, ибо фактор-группа (6/)/3 $\sqcup$ 2/; *84* *шесть*-средних группы (6/)-симметрии с учётом энантиоморфизма и *66* таких групп без его учета, в связи с тем, что фактор-группа (6/)/6 $\sqcup$ 1/; а также *84 (3/)*-средних группы *(6/)*-симметрии с учетом энантиоморфизма и *66* таких групп без его учёта, в связи с тем, что фактор-группа (6/)/(3/) $\sqcup$ 2.

Таким образом, при *(6/)*-симметрии отмеченные *18* стержневых групп порождают *359* новых групп с учётом энантиоморфизма, среди которых *36* младших и *323* *Q*-средних, а без учёта энантиоморфизма таких группы насчитывается только *295*, среди которых *30* младших и *265* *Q*-средних.

Суммируя перечисленные выше результаты вывода младших и подсчёта *Q*-средних групп (*p/*)-симметрии при $p = 2, 3, 4, 6$ из *31* асимморфной стержневой группы G_{31}, получаем новые, различные с учетом энантиоморфизма *1093* трехмерные линейные асимморфные группы (*p/*)-симметрии при отмеченных значениях *p*, среди которых *217* младших и *876* *Q*-средних, а без учёта энантиоморфизма таких же различных групп всего 89*4*, среди которых *184* младших и *710* *Q*-средних.

Используя, наконец, результаты вывода стержневых кристаллографических асимморфных групп симметрии из таких же стержневых симморфных групп и их обобщение с *p*-симметрией (при $p = 1,2,3,4,6$) и (*1/*)-симметрией, представленных в п.3 настоящей статьи, а также результаты вывода младших и *Q*-средних асимморфных стержневых групп (*p/*)-симметрии (при $p = 2,3,4,6$), представленных выше, получаем, что при обобщении трехмерных линейных кристаллографических асимморфных групп с *10* розеточными *P*-симметриями ($P \sqcup G_{20}$) получаем *1822* различные с учётом энантиоморфизма группы *P*-симметрии, среди которых *31* порождающая, *279* старших, *451* младшая и *1061* *Q*-средняя, а без учета энантиоморфизма таких групп *1454*, среди которых *23* порождающих, *207* старших, *369* младших и *855* *Q*-средних.

6. Отметим, что индексы и знаки, приписываемые точкам фигуры при обобщении их групп симметрии с определенной *P*-симметрией, имеют внегеометрический смысл по отношению к пространству, в котором рассматривается фигура. В добавочных измерениях этим индексам и знакам можно придавать геометрический смысл, что и позволило применить в [8, 12, 10, 11] одно-, двух- и трехмерные кристаллографические группы *P*-симметрии к исследованию многомерных групп симметрии.

Опираясь на различные способы использования кристаллографических групп *P*-симметрии к изучению многомерных групп симметрии и на результаты [5, 6], приходим к твердому убеждению, что выявленные в настоящей работе трёхмерные линейные асимморфные группы розеточных *P*-симметрий пригодны для точной интерпретации пятимерных " асимморфных" групп симметрии с инвариантной трёхмерной плоскостью и прямой в ней, т.е. "асимморфных" групп симметрии категории G_{531}.

Соответствие между "асимморфными" группами симметрии категории G_{531} и выявленными в настоящей работе *1822* различными с учётом энантиоморфизма стержневыми асимморфными группами *10* розеточных *P*-симметрий не является, однако, взаимно однозначным. Каждая группа из категории асимморфных стержневых групп розеточных *P*-симметрий с учетом энантиоморфизма интерпретирует именно одну "асимморфную" группу категории G_{531}, обратное же соответствие не всегда однозначно. Двум различным только за счет энантиоморфизма стержневым асимморфным группам розеточных *P*-симметрий сопоставляются одинаковые "асимморфные" группы категории G_{531}. Отсюда следует, что при выяснении количества неодинаковых "асимморфных" групп категории G_{531} с помощью асимморфных стержневых групп розеточных *P*-симметрий нужно, чтобы среди этих групп не было бы различных за счёт энантиоморфизма, а число таких асимморфных стержневых групп розеточных *P*-симметрий в настоящей работе нами установленно и равно *1454*, из которых *23* порождающих, *207* старших, *369* младших и *855* *Q*-средних. Следовательно, между различными "асимморфными" группами симметрии категории G_{531} и *1454* различными без учёта энантиоморфизма трёхмерными линейными асимморфными группами G_{31}^{P} розеточных *P*-симметрий устанавливается не только взаимно однозначное, но и сильно изоморфное соответствие [13]. Иначе говоря, каждая стержневая асимморфная группа розеточных *P*-симметрий из числа *1454* различных без учёта энантиоморфизма передает строение интерпретируемой ею группы симметрии категории G_{531}. А это говорит о том, что выписываемые нами асимморфные стержневые группы розеточных *P*-симметрий в используемой символике являются одновременно и "асимморфными" группами симметрии категории G_{531}. Следовательно, поставленная в настоящей работе задача решена полностью, а с ней завершена также задача применения разных подразделений стержневых групп розеточных *P*-симметрий к исследованию *5*-мерных групп симметрии категории G_{531}.

7. В заключение отметим, что при выявлении количества различных групп симметрии категории G_{531} в работах [5], [6] и в настоящей с помощью разных подразделений стержневых групп розеточных *P*-симметрий нами впервые в работе [5] с помощью одномерной циклической группы параллельных переносов и точечных кристаллографических групп симметрии конечных цилиндров G_{310} получены все симморфные трёхмерные линейные кристаллографические группы симметрии, входящие в состав *75* кристаллографических групп симметрии стержней. При обобщении этих групп с *10* розеточными *P*-симметриями установлено, что среди различных младших групп с учетом энантиоморфизма, которые полностью выписаны в [5], насчитывается *860* новых групп, из которых *31* порождающая (группы *1*-симметрии), *122* *два*-симметрии, *19* *три*-симметрии, *30* *четыре*-симметрии, *53* *шесть*-симметрии, *122* (*1/*)-симметрии, *322* (*2/*)-симметрии, *32* *(3/*)-симметрии, *49* *(4/*)-симметрии и *80* *(6/*)-симметрии. Всех же различных с учетом энантиоморфизма симморфных стержневых групп розеточных *P*-симметрий насчитывается *2932*, из которых *31* порождающая, *279* старших, *829* младших и *1793* *Q*-средних [5].

При обобщении *31* симморфной стержневой группы с *10* розеточными *P*-симметриями среди различных младших без учета энантиоморфизма насчитывается только *846* групп, из которых *31* порождающая, *122* *два*-симметрии, *17* *три*-симметрии, *29* *четыре*-симметрии, *49* *шесть*-симметрии, *122* *(1/*)-симметрии, *322* *(2/)*-симметрии, *30* *(3/*)-симметрии, *48* *(4/)*-симметрии и *76* *(6/)*-симметрии, а всех различных симморфных стержневых групп розеточных *P*-симметрий без учёта энантиоморфизма различается *2915,* а не *2914,* как указано в [5], из которых *31* порождающая, *279* старших, *815* младших и *1790* Q-средних. Несовпадение количества различных без учёта энантиоморфизма стержневых симморфных групп 10 розеточных P-симметрий в [5] и в настоящей объясняется неправильностью подсчета различных энантиоморфных пар среди всех различных с учётом энантиоморфизма симморфных стержневых групп розеточных P-симметрий, правильно указанных в [5], – двух среди групп *3*-симметрии, одной среди групп *4*-симметрии, трёх пар среди групп *6*-симметрии и двух пар среди *2*-средних групп *6*-симметрии, а также двух пар среди групп (3/)-симметрии, одной энантиоморфной пары среди групп (*4/*)-симметрии, четырех пар среди групп (*6/*)-симметрии и двух пар среди *2*-средних групп (*6/*)-симметрии. Всего различных энантиоморфных пар среди *2932* неодинаковых без учёта энантиоморфизма стержневых симморфных групп розеточных P-симметрий оказывается *17*, а не *18,* как отмечено на с. 21 в [5]. Следовательно, различных стержневых симморфных групп без учёта энантиоморфизма различается *2932 – 17 = 2915*. Так как среди "симморфных" групп симметрии категории G_{531} нет энантиоморфных пар, то таких групп оказывается также *2915*.

Далее, путем превращения в симморфных стержневых группах плоскостей отражения в плоскости скользящих отражений в [6] получено *13* гемисимморфных стержневых групп. При их обобщении с *10* розеточными P-симметриями получено *217* различных с учетом энантиоморфизма младших гемисимморфных стержневых групп розеточных P-симметрий, полностью выписанных в [6], среди которых *13* порождающих, *38 два*-симметрии, *5 три*-симметрии, *9 четыре*-симметрии, *8 шесть*-симметрии, *38 (1/*)-симметрии, *61 (2/*)-симметрии, *13 (3/*)-симметрии, *15 (4/*)-симметрии и *17 (6/*)-симметрии. Что касается различных младших гемисимморфных стержневых групп розеточных P-симметрий без учёта энантиоморфизма, то их тоже *217*. А это говорит о том, что среди гемисимморфных стержневых групп розеточных P-симметрий не имеется энантиоморфных пар.

Всех же различных гемисимморфных стержневых групп розеточных P-симметрий, как показано в [6], насчитывается *816*, среди которых *13* порождающих, *117* старших, *204* младших и *482* Q-средних. Так как среди гемисимморфных стержневых групп розеточных P-симметрий отсутствуют энантиоморфные пары, то всех различных "гемисимморфных" групп симметрии категории G_{531} также *816* [6].

Наконец, путем превращения поворотных осей в симморфных стержневых группах в винтовые оси, в настоящей работе получена *31* стержневая асимморфная группа. При обобщении этих групп с *10* розеточными P-симметриями получено *483* различных младших с учётом энантиоморфизма асимморфных стержневых группы P-симметрии, полностью выписанных в настоящей работе, среди которых *31* порождающая, *84 два*-симметрии, *17 три*-симметрии, *20 четыре*-смметрии, *29 шесть*-симметрии, *84* (*1/*)-симметрии, *133 (2/*)-симметрии, *22 (3/*)-симметрии, *27 (4/*)-симметрии и *36 (6/*)-симметрии, а без учёта энантиоморфизма таких младших асимморфных стержневых групп розеточных P-симметрий различается только *392*, из которых *23* порождающих, *66 два*-симметрии, *13 три*-симметрии, *16 четыре*-симметрии, *23 шесть*-симметрии, *66 (1/*)-симметрии, *115 (2/*)-симметрии, *18 (3/*)-симметрии, *22 (4/*)-симметрии, *30 (6/*)-симметрии.

Всех же различных асимморфных стержневых групп *10* розеточных P-симметрий с учётом энантиоморфизма насчитывается *1822*, среди которых *31* порождающая, *279* старших, *452* младших и *1061* Q-средняя. А всех таких же различных асимморфных стержневых групп *10* розеточных P-симметрий без учёта энантиоморфизма различается только *1454*, из которых *23* порождающих, *207* старших, *369* младших и *855* Q-средних, Ввиду того, что среди групп симметрии категории G_{531} отсутствуют энантиоморфные пары, то различных "асимморфных" групп симметрии категории G_{531} насчитывается *1454* (см. концовку п.6 настоящей работы).

Суммируя результаты обобщения *31* симморфной, *13* гемисимморфных и *31* асимморфной стержневых групп с *10* розеточными P-симметриями, получим *5571* различную с учетом энантиоморфизма стержневую группу розеточных P-симметрий, среди которых *2932* симморфных, *816* гемисимморфных и *1823* асимморфных. С другой стороны, при обобщении *75* стержневых кристаллографических групп G_{31} с *10* розеточными P-симметриями получим *5571* различную с учетом энантиоморфизма группу G_{31}^{P} розеточных P-симметрий, среди которых *75* порождающих, *675* старших, *1485* младших и *3336* Q-средних.

Аналогичным образом суммируя результаты обобщения *31* симморфной, *13* гемисимморфных и *23* асимморфных трехмерных линейных групп розеточных *P*-симметрий с *10* розеточными *P*-симметриями, получим *5185* различных без учёта энантиоморфизма групп G_{31}^{P} розеточных *P*-симметрий, среди которых *67* порождающих, *603* старших, *1388* младших и *3127* *Q*-средних. А так как среди групп симметрии категории G_{531} не имеется энантиоморфных пар, то всех таких различных групп симметрии *5185*, а не *5177,* как указано на с.96 в [12].

Суммируя, наконец, результаты различных младших с учётом энантиоморфизма симморфных, гемисимморфных и асимморфных стержневых групп розеточных *P*-симметрий, получим: *(31 +13 +31)* порождающих + *(122 + 38 + 84) два*-симметрии + *(19 + 5 + 17) три*-симметрии + *(30 + 9 + 20) четыре*-симметрии+*(53 + 8 + 29) шесть*-симметрии + *(122 + 38 +84) (1/)*-симметрии + *(322 + 61 + 133)(2/)*-симметрии + *(32 + 13 + 22) (3/)*-симметрии + *(49 +15 +27) (4/)*-симметрии + *(80 + 17 + 36) (6/)*-симметрии = *75* порождающих + *244 два*-симметрии + *41 три*-симметрии + *59 четыре*-симметрии + *90 шесть*-симметрии + *244 (1/)*-симметрии + *516(2/)*-симметрии + *67 (3/)*-симметрии + *91(4/)*-симметрии + *133(6/)*-симметрии = *1560* различных младших с учётом энантиоморфизма, если считать *75* порождающих стержневых групп как младшие *1*-симметрии. Из приведенного расчёта следует, что при обобщении 75 стержневых групп с *(p/)*-симметрией при *p = 3, 4* и *6*, получаем *291* различную младшую стержневую группу $G_{31}^{P'}$ с учетом энантиоморфизма, где *67 (3/)*-симметрии, *91 (4/)*-симметрии и 133 (6/)-симметрии, а не *287*, из которых *65 (3/)*-симметрии, *89 (4/)*-симметрии и *133 (6/)*-симметрии, как указано на с. 64 в [15]. Отметим при этом, что при исследовании в [6] трёхмерных гемисимморфных кристаллографических линейных групп розеточных *P*-симметрий были выведены 6 младших стержневых групп (*p/*)-симметрии, среди которых две группы $p^{(3}\overline{4}^{/)}2^{//)}c^{(-3}$ и $p^{(3}\overline{3}^{/)}c^{(-3}$ (*3/*)-симметрии, две группы $p^{(2}\overline{4}^{/)}2^{//)}c^{(4}$ и $p^{(2}\overline{3}^{/)}c^{(4}$ (*4/*)-симметрии, а также две группы $p^{(3}\overline{4}^{/)}2^{//)}c^{(6}$ и $p^{(3}\overline{3}^{/)}c^{(6}$ (*6/*)-симметрии, не попавшие в список младших стержневых групп (*p/*)-симметрии в [15]. В свою очередь, при исследовании в настоящей работе трёхмерных асимморфных кристаллографических линейных групп розеточных *P*-симметрий было обнаружено, что в список младших стержневых групп (*6/*)-симметрии работы [15] попали две группы $p^{(6}4_2^{(3}/m^{/)}$ и $p^{(6}4_2^{(-6}/m^{/}$, не являющиеся младшими стержневыми группами (*6/*) симметрии.

Просуммировав, наконец, результаты обобщения *31* симморфной, *13* гемисимморфных и *23* асимморфных стержневых групп с *10* розеточными *P*-симметриями и ограничиваясь только различными младшими стержневыми группами розеточных *P*-симметрий без учёта энантиоморфизма, получим (*31 + 13 + 23*) порождающих, (*122 + 38 + 66) два*-симметрий + *(17 +5 + 13) три*-симметрии + *(29 + 9 + 16) четыре* симметрии + *(49 +8 + 23) шесть*-симметрии +(*122 + 38 + 66) (1/)*-симметрии + *(322 + 61 + 115)(2/)*-симметрии + (*30 + 13 + 18) (3/)*-симметрии + *(48 + 15 + 22) (4/)*-симметрии + *(76 + 17 +30) (6/)*-симметрии = *67* порождающих + *226 два*-симметрии + *35 три*-симметрии + *54 четыре*-симметрии + *80 шесть*-симметрии + *226 (1/)*-симметрии + *498 (2/)*- симметрии + *61 (3/)*-симметрии + *85 (4/)*-симметрии + *123 (6/)*- симметрии = *1455* различных без учета энантиоморфизма младших стержневых групп розеточных *P*-симметрий, если *67* различных стержневых групп без учёта энантиоморфизма считать младшими *1*-симметрии.

Таким образом, среди всех различных с учётом энантиоморфизма *1560* младших стержневых групп розеточных *P*-симметрий, порождаемых *75* стержневыми группами симметрии, вместе с этими порождающими группами содержится *1455* различных без учета энантиоморфизма стержневых групп розеточных *P*-симметрий вместе с *67* их порождающими, которые мы выделили, анализируя результаты [5], [6] и настоящей работы.

В итоге нами не только уточнены результаты работ [12] и [15], но и окончательно установлено, что групп симметрии *5*-мерного эвклидова пространства, сохраняющих в нём инвариантными трёхмерную плоскость и вложенную в неё прямую, то есть всевозможных различных групп симметрии категории G_{531}, насчитывается ровно *5185*. Тем самым ещё раз показано, что кристаллографические группы *P*-симметрии при их полной классификации с точки зрения общей теории *P*-симметрии позволяют плодотворно продвинуть вперёд принципиальное решение задачи *n*-мерной дискретной геометрии и геометрической кристаллографии при $n \geq 4$.

Литература:

1. Шубников А.В. Атлас кристаллографических групп симметрии. - Москва: изд-во АН СССР, 1946. - 57 с.
2. Заморзаев А.М., Палистрант А.Ф. Геометрические аспекты теории групп. - Кишинев: Изд-во КГУ, 1978. - 59 с.
3. Галярский Э.И., Заморзаев А.М. Полный вывод кристаллографических групп симметрии и различного рода антисимметрии стержней // Кристаллография. - 1965. - Т.10. - Вып. 2. - С.147-154.
4. Неронова Н.Н., Белов Н.В. Единая схема кристаллографических групп симметрии классических и черно-белых //Кристаллография. - 1961. - Т.6. - Вып. 1. - С.3-12.
5. Палистрант Александр. Трехмерные симморфные кристаллографические линейные группы розеточных Р-симметрий и их многомерные приложения // STUDIA UNIVERSITATIS. Revista Ştiintifică: Seria: Ştiinţe exacte şi economice (Matematică. Informatică. Economie). - Nr.3(13). - Chisinău: Universitatea de Stat din Moldova, 2008, p.14-22.
6. Палистрант Александр. Трехмерные гемисимморфные кристаллографические линейные группы розеточных Р-симметрий и их многомерные приложения // STUDIA UNIVERSITATIS. Revista Ştiinţifică: Seria: Ştiinţe exacte şi economice (Matematică. Informatică. Economie). Nr.8(18). - Chisinău: Universitatea de Stat din Moldova, 2008, p.81-89.
7. Заморзаев А.М., Палистрант А.Ф. Теория дискретных групп симметрии. - Кишинев: Изд-во КГУ, 1977. - 100 с.
8. Заморзаев А.М. Теория простой и кратной антисимметрии. - Кишинев: Штиинца, 1976. - 283 с.
9. Заморзаев А.М., Палистрант А.Ф. Геометрические аспекты теории групп. - Кишинев: Изд-во КГУ, 1978. - 59 с.
10. Палистрант А.Ф. О группах (р,2)- и (р/, 2)-симметрии и их геометрических приложениях // Алгебраические структуры и геометрия. - Кишинев: Штиинца, 1991, с.92-105.
11. Палистрант Александр. Многомерные приложения розеточных и таблеточных Р-симметрий // Analele ştiinţifice ale Universităţii de Stat din Moldova. Seria: Ştiinţe fizico-matematice. - Chişinău, 1999, p.243-247.
12. Заморзаев А.М., Карпова Ю.С., Лунгу А.П., Палистрант А.Ф. Р-симметрия и ее дальнейшее развитие. - Кишинев: Штиинца, 1986. - 156 с.
13. Заморзаев А.М. О сильном изоморфизме групп и изоморфизме Р-симметрий // Известия АН РМ . Математика. - 1994. - №1. - С.75-84.
14. Галярский Э.И. Группы симметрии подобия и их обобщения Дисс….канд. физ.-матем. наук. - Кишинев, 1970. - 297 с.
15. Палистрант А.Ф. Трехмерные линейные и плоскостные группы (р/)-симметрии // Общая алгебра и дискретная геометрия. - Кишинев: Штиинца, 1980, с.58-71.

Prezentat la 31.01.2009