METODA SUBDOMENIILOR LA REZOLVAREA SISTEMELOR DE ECUAŢII INTEGRALE SINGULARE, DEFINITE PE CONTURURI NETEDE ÎNCHISE ÎN PLANUL COMPLEX

Maria CAPCELEA, Titu CAPCELEA

Catedra Matematica Aplicată

It is proposed a calculation scheme of the sub-domain method for the approximate solving of systems of singular integral equations defined on simple closed and smooth contour in the complex plane. The theoretical justification of this method in the Hölder spaces scale is obtained.

Un număr mare de lucrări ştiinţifice sunt dedicate problemei rezolvării aproximative a ecuaţiilor integrale singulare (EIS) (*a se vedea*, de exemplu, [1-7] şi bibliografia din ele). În particular, a fost cercetată metoda subdomeniilor pentru rezolvarea EIS în cazul când acestea sunt definite pe cercul unitate al planului complex [8], sau pe segment al axei reale [9-10]. În lucrările recente [11-12] a fost obţinută fundamentarea teoretică a acestei metode în spaţiile Lebesgue L_p $(1<p<\infty)$ în cazul când ecuaţia este definită pe contur simplu, neted şi închis în planul complex, iar coeficienţii acesteia sunt funcţii continue după Hölder.

În prezenta lucrare se va obţine fundamentarea teoretică în scara spaţiilor Hölder a metodei subdomeniilor pentru rezolvarea sistemelor de EIS (SEIS), definite pe contururi închise şi netede arbitrare din planul complex.

1. Definiţii şi notaţii

Fie Γ un contur neted şi închis ce mărgineşte domeniul monoconex F^+, iar $F^- = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{F^+ \cup \Gamma\}$, $\overline{\mathbb{C}}$ – planul complex complet. Vom considera că punctul $z = 0 \in F^+$.

Fie $t = \psi(w)$ funcţia Riemann a conturului Γ ce realizează transformarea conformă a exteriorului cercului $\Gamma_0 = \{w : |w| = 1\}$ în exteriorul lui Γ astfel încât $\psi(\infty) = \infty,\ \psi'(\infty) = d > 0$. Vom spune că conturul Γ aparţine clasei Λ, dacă funcţia Riemann a acestui contur posedă derivată continuă de ordinul I.

Fie l lungimea conturului Γ, iar $t = t(s),\ s \in [0; l]$ este ecuaţia parametrică a acestuia. Vom nota prin $s_k,\ k = \overline{0, 2n}$, punctele segmentului $[0; l]$ ce reprezintă valorile lungimii de arc s şi care corespund nodurilor Féjer:

$$t_k = \psi(\exp(2\pi ik/(2n+1))) \equiv \psi(w_k),\ k = \overline{0, 2n},\ i^2 = -1. \qquad (1)$$

Vom nota prin $H_\beta(\Gamma),\ \beta \in (0;1]$ spaţiul Banach de funcţii ce satisfac pe Γ condiţia Hölder cu exponenta β, înzestrat cu norma

$$\|g\|_\beta = \|g\|_{C(\Gamma)} + H(g;\beta),\ \ H(g;\beta) = \sup_{t' \neq t''}\left\{|t' - t''|^{-\beta}|g(t') - g(t'')|\right\},\ t', t'' \in \Gamma,$$

unde $C(\Gamma)$ este spaţiul tuturor funcţiilor continue pe Γ cu norma $\|g\|_C = \|g\|_{C(\Gamma)} := \max\limits_{t \in \Gamma}|g(t)|$.

Dacă X este un spaţiu normat, atunci vom nota prin $[X]_m$ spaţiul de vectori m-dimensionali cu componente din X şi cu norma egală cu suma normelor componentelor, iar prin $[X]_{m \times m}$ – spaţiul de matrici de dimensiune $m \times m$ cu elemente din X şi cu norma

$$\|A\| := \max_k \sum_{j=1}^{m} \|a_{jk}\|_X,\ A = \{a_{jk}\}_{j,k=1}^{m}.$$

Pentru norma elementului $g \in H_\beta^m := [H_\beta(\Gamma)]_m$ vom utiliza notaţia $\|g\|_{\beta,m}$.

2. Aproximarea funcţiilor cu polinoame de interpolare Lozinski

Pentru orice funcţie $g(t) \in C(\Gamma)$ definim polinoamele de interpolare Lozinski

$$(L_n g)(t) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{h_k} \int_{s_k}^{s_{k+1}} g(t(s))ds \cdot \mathsf{L}_k(t), \; t \in \Gamma, \tag{2}$$

unde $h_k = s_{k+1} - s_k$, $k = \overline{0,2n}$, $s_0 = 0$, $s_{2n+1} = l$, iar

$$\mathsf{L}_k(t) = (t_k t^{-1})^n \prod_{r=0, r\neq k}^{2n} \frac{t - t_r}{t_k - t_r} = \sum_{r=-n}^{n} \Lambda_r^{(k)} t^r, \; t \in \Gamma, k = \overline{0,2n} \tag{3}$$

sunt polinoamele fundamentale de interpolare Lagrange.

În această secţiune vom stabili estimaţii pentru viteza de convergenţă a procesului de intepolare (2), (3) în scara spaţiilor Hölder $H_\beta(\Gamma)$, $\beta \in (0;1]$. Deoarece spaţiile Hölder nu sunt separabile [13], nu este posibilă aproximarea întregului spaţiu cu agregate finit-dimensionale. Însă, problema formulată poate fi depăşită pentru unele subclase de funcţii din $H_\beta(\Gamma)$.

Teorema 1. *Fie* $\Gamma \in \Lambda$*, iar* $g(t) \in H_\alpha(\Gamma)$, $\alpha \in (0;1]$. *Dacă nodurile* t_k, $k = \overline{0,2n}$*, din componenţa polinoamelor (3) sunt calculate conform formulei (1), iar* $\beta \in (0;\alpha)$*, atunci*

$$\|g - L_n g\|_\beta \le \frac{c_1 + c_2 \ln n}{n^{\alpha-\beta}} H(g;\alpha). \tag{4}$$

Aici şi în cele ce urmează vom nota prin $c_1, c_2, \ldots$ constante concrete ce nu depind de n.

Demonstraţie. Deoarece $\|g - L_n g\|_\beta = \|g - L_n g\|_C + H(g - L_n g;\beta)$, vom estima cele două mărimi din partea dreaptă a ultimei egalităţi. Avem:

$$|g(t) - (L_n g)(t)| \le \|g - U_n g\|_C + \|U_n g - L_n g\|_C = \|g - U_n g\|_C + \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{h_k} \int_{s_k}^{s_{k+1}} |g(t_k) - g(t(s))| ds \cdot |\mathsf{L}_k(t)|, \tag{5}$$

unde $(U_n g)(t) = \sum_{k=0}^{2n} g(t_k) \mathsf{L}_k(t)$ este polinomul de interpolare Lagrange, construit după reţeaua de noduri (1). Vom estima mărimea $|g(t_k) - g(t(s))|$ pentru $s \in [s_k; s_{k+1}]$, $k = \overline{0,2n}$. Ţinând cont de inegalitatea $|g(t_k) - g(t(s))| \le \omega(g; |t_k - t(s)|)$, unde $\omega(g;\delta) := \sup\limits_{|t'-t''|\le\delta} |g(t') - g(t'')|$ este modulul de continuitate al funcţiei $g(t)$, precum şi de relaţia $|t_k - t(s)| = \left| \int_{s_k}^{s} t'(s)ds \right| \le h_k \|t'(s)\|_C = h_k$, $s \in [s_k; s_{k+1}]$, obţinem

$$|g(t_k) - g(t(s))| \le \omega(g; h_k), \; k = \overline{0,2n}. \tag{6}$$

Acum vom estima h_k, $k = \overline{0,2n}$. Vom utiliza proprietatea bine cunoscută a conturului neted – lungimea $\mathrm{mesarc}(t', t'')$ a arcului mai mic ce uneşte punctele t' şi t'' de pe Γ nu întrece lungimea coardei $|t' - t''|$, înmulţită la un număr constant r_0:

$$\mathrm{mesarc}(t', t'') \le r_0 |t' - t''|, \tag{7}$$

(r_0 nu depinde de poziţionarea punctelor t' şi t'' pe Γ şi se determină de conturul Γ; de exemplu, în cazul când Γ coincide cu circumferinţa Γ_0, avem $r_0 = \pi/2$). Avem:

$$h_k = s_{k+1} - s_k = \mathrm{mesarc}(t_k, t_{k+1}) \le r_0 \left| t_{k+1} - t_k \right| = r_0 \left| \int_{w_k}^{w_{k+1}} \psi'(\tau)d\tau \right| \le r_0 \left\| \psi' \right\|_C \mathrm{mesarc}(w_k, w_{k+1}) \le$$

$$\le r_0 \left\| \psi' \right\|_C \frac{\pi}{2} \left| w_{k+1} - w_k \right| = r_0 \pi \left\| \psi' \right\|_C \sin\frac{\pi}{2n+1} \le r_0 \pi \left\| \psi' \right\|_C \frac{1}{n},\ n \ge 2 .$$

Atunci, în relația (6) vom avea $\left| g(t_k) - g(t(s)) \right| \le (r_0 \pi \left\| \psi' \right\|_C + 1)\omega(g;1/n),\ s \in [s_k; s_{k+1}]$, și deci

$$\left\| U_n g - L_n g \right\|_C \le (r_0 \pi \left\| \psi' \right\|_C + 1)\omega(g;1/n)\lambda_n , \tag{8}$$

unde $\lambda_n := \max_{t \in \Gamma} \sum_{k=0}^{2n} \left| L_k(t) \right|$ sunt constantele de interpolare Lebesgue. Ținând cont de inegalitățile $\lambda_n \le c_3 + c_4 \ln n,\ \left\| g - U_n g \right\|_C \le (c_5 + c_6 \ln n)E_n(g)$, ($E_n(g)$ fiind cea mai bună aproximare uniformă a funcției $g(t)$ în clasa de polinoame P_n, $P_n = \{p_n(t) : p_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k t^k \mid \alpha_k \in \mathbb{C}, t \in \Gamma\}$), $E_n(g) \le c_7 \omega(g;1/n) \le c_7 \frac{H(g;\alpha)}{n^\alpha}$ $(g \in H_\alpha(\Gamma))$, care au fost stabilite în [7], obținem:

$$\left\| g - L_n g \right\|_C \le \frac{c_8 + c_9 \ln n}{n^\alpha} H(g;\alpha) . \tag{9}$$

Vom estima acum mărimea $H(g - L_n g;\beta)$. Fie t' și t'' sunt două puncte arbitrare ale conturului Γ. Vom analiza separat două cazuri posibile de amplasare a acestora:

a) $\left| t' - t'' \right| > \frac{1}{n}$ și b) $0 < \left| t' - t'' \right| \le \frac{1}{n}$.

În cazul a), ținând cont de inegalitatea (9), vom avea:

$$\eta_n := \frac{\left| g(t') - (L_n g)(t') - g(t'') + (L_n g)(t'') \right|}{\left| t' - t'' \right|^\beta} \le \frac{\left| g(t') - (L_n g)(t') \right|}{\left| t' - t'' \right|^\beta} + \frac{\left| g(t'') - (L_n g)(t'') \right|}{\left| t' - t'' \right|^\beta} \le 2\frac{c_8 + c_9 \ln n}{n^{\alpha-\beta}} H(g;\alpha)$$

În cazul b) vom avea:

$$\eta_n \le \frac{1}{\left| t' - t'' \right|^\beta} \left(\left| g(t') - g(t'') + (U_n g)(t'') - (U_n g)(t') \right| + \left| (U_n g - L_n g)(t') - (U_n g - L_n g)(t'') \right| \right) = I_1 + I_2 .$$

Termenul I_1 a fost estimat în [7, p.49]: $I_1 \le \frac{c_{10} + c_{11} \ln n}{n^{\alpha-\beta}} H(g;\alpha)$. Pentru a estima termenul I_2, vom utiliza relația $\left\| p_n' \right\|_C \le c_{12} n \left\| p_n \right\|_C$, $\forall p_n \in P_n$ [7, p.43]:

$$I_2 = \frac{1}{\left| t' - t'' \right|^\beta} \left| (U_n g - L_n g)(t') - (U_n g - L_n g)(t'') \right| = \frac{1}{\left| t' - t'' \right|^\beta} \left| \int_{t'}^{t''} (U_n g - L_n g)'(\tau)d\tau \right| \le$$

$$\le \left\| (U_n g - L_n g)' \right\|_C \mathrm{mesarc}(t', t'') \frac{1}{\left| t' - t'' \right|^\beta} \le c_{12} n \left\| U_n g - L_n g \right\|_C r_0 \left| t' - t'' \right|^{1-\beta} .$$

Conform inegalității (8), obținem $I_2 \le \frac{c_{13} + c_{14} \ln n}{n^{\alpha-\beta}} H(g;\alpha)$, și atunci estimațiile I_k, $k = \overline{1,2}$, implică $\eta_n \le \frac{c_{15} + c_{16} \ln n}{n^{\alpha-\beta}} H(g;\alpha)$. Această estimație împreună cu cea obținută în cazul a) și relația (9) implică inegalitatea (4).

Teorema este demonstrată.

3. Schema de calcul a metodei subdomeniilor pentru rezolvarea SEIS

În spațiul Banach H_α^m $(\alpha \in (0;1])$ vom considera SEIS

$$\sum_{j=1}^{m}\left(c_{rj}(t)\varphi_j(t) + \frac{d_{rj}(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi_j(\tau)}{\tau - t}d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma h_{rj}(t,\tau)\varphi_j(\tau)d\tau \right) = f_r(t) \ \ (t \in \Gamma, r = \overline{1,m}), \quad (10)$$

în care funcțiile $c_{rj}(t), d_{rj}(t), f_r(t) \in H_\alpha(\Gamma), h_{rj}(t,\tau) \in H_\alpha(\Gamma \times \Gamma)$ sunt cunoscute, iar $\varphi_j(t)$ sunt funcții necunoscute. Vom nota $\varphi(t) = \{\varphi_j(t)\}_{j=1}^m$, $f(t) = \{f_r(t)\}_{r=1}^m$, $C(t) = \{c_{rj}(t)\}_{r,j=1}^m$, $D(t) = \{d_{rj}(t)\}_{r,j=1}^m$, $K(t,\tau) = \{h_{rj}(t,\tau)\}_{r,j=1}^m$. Atunci, sistemul (10) poate fi scris sub formă matriceală

$$(M\varphi \equiv) C(t)\varphi(t) + D(t)\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t), \ t \in \Gamma. \quad (11)$$

Din considerente de comoditate, vom scrie ecuația (11) sub forma echivalentă

$$(M\varphi \equiv) A(t)(P\varphi)(t) + B(t)(Q\varphi)(t) + (T\varphi)(t) = f(t), \ t \in \Gamma, \quad (12)$$

unde $A(t) = C(t) + Dt)$, $B(t) = C(t) - D(t)$, $(T\varphi)(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau$, $S = \{\delta_{sk}S_1\}_{s,k=1}^m$, $P = (I + S)/2$, $Q = I - P$, I – operatorul identic în H_α^m, S_1 – operatorul singular cu nucleu Cauchy scalar, δ_{sk} – simbolul lui Kronecker.

Vom defini schema de calcul a metodei subdomeniilor pentru rezolvarea SEIS (11). Soluția aproximativă a SEIS (11) se va căuta sub forma vector-funcției polinomiale

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k^{(n)} t^k, \ t \in \Gamma, \quad (13)$$

ai cărei coeficienți $\alpha_k := \alpha_k^{(n)} = (\alpha_{k1}, ..., \alpha_{km})$ sunt vectori numerici m-dimensionali necunoscuți.

Conform metodei subdomeniilor, acești vectori îi vom găsi din condiția ca integrala de la funcția residuală $(M\varphi_n)(t) - f(t)$ să fie egală cu zero pe fiecare dintre segmentele $[s_l; s_{l+1}]$, $l = \overline{0,2n}$:

$$\int_{s_l}^{s_{l+1}} \left[(M\varphi_n)(t(s)) - f(t(s))\right] ds = 0, \ l = \overline{0,2n}. \quad (14)$$

Schema de calcul (13), (14) definește următorul sistem de ecuații algebrice liniare (SEAL) pentru a determina necunoscutele α_k, $k = \overline{-n,n}$:

$$\sum_{k=0}^{n}\int_{s_l}^{s_{l+1}} A(t(s))[t(s)]^k ds \cdot \alpha_k + \sum_{k=-n}^{-1}\int_{s_l}^{s_{l+1}} B(t(s))[t(s)]^k ds \cdot \alpha_k +$$
$$+ \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi i}\int_{s_l}^{s_{l+1}}\int_\Gamma K(t(s),\tau)\tau^k d\tau ds \cdot \alpha_k = \int_{s_l}^{s_{l+1}} f(t(s))ds, \ l = \overline{0,2n}, \quad (15)$$

sau, scris pe coordonate, vom avea:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\int_{s_l}^{s_{l+1}} a_{rj}(t(s))[t(s)]^k ds \cdot \alpha_{kj} + \sum_{k=-n}^{-1}\sum_{j=1}^{m}\int_{s_l}^{s_{l+1}} b_{rj}(t(s))[t(s)]^k ds \cdot \alpha_{kj} +$$
$$+ \sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=1}^{m}\int_{s_l}^{s_{l+1}} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma h_{rj}(t(s),\tau)\tau^k d\tau ds \cdot \alpha_{kj} = \int_{s_l}^{s_{l+1}} f_r(t(s))ds, \ r = \overline{1,m}, \ l = \overline{0,2n}, \quad (16)$$

unde $A(t) = \{a_{rj}(t)\}_{r,j=1}^m$, $B(t) = \{b_{rj}(t)\}_{r,j=1}^m$, $K(t,\tau) = \{h_{rj}(t,\tau)\}_{r,j=1}^m$, $\alpha_k = \{\alpha_{kj}\}_{j=1}^m$, $k = \overline{-n,n}$.

4. Fundamentarea teoretică a metodei subdomeniilor

Următoarea teoremă ne dă fundamentarea teoretică în scara spațiilor Hölder H_β^m, $\beta \in (0;1]$, a schemei de calcul (13), (16) pentru rezolvarea aproximativă a SEIS (11).

Teorema 2. *Fie că se îndeplinesc următoarele condiții:*

1. *Curba pe care este definit SEIS (11) aparține clasei* Λ;
2. *Matricele de funcții (MF)* $A(t), B(t) \in H_\alpha^{m\times m}, \alpha \in (0;1]$;
3. $\det A(t) \det B(t) \neq 0,\ t \in \Gamma$;
4. *Toți indicii parțiali de stânga* $\kappa_j, j = \overline{1,m}$*, ai MF* $B^{-1}(t)A(t)$ *sunt egali cu zero*;
5. $K(t,\tau) \in [H_\alpha(\Gamma \times \Gamma)]_{m\times m}$ *(uniform în raport cu ambele variabile)*;
6. $\dim \operatorname{Ker} M = 0$;
7. $0 < \beta < \alpha \leq 1$;
8. *Punctele* $s_l \in [0;l]$, $l = \overline{0,2n}$*, reprezintă valorile lungimii de arc* s *pentru care are loc relația* $t(s_l) = t_l$, $l = \overline{0,2n}$*, unde* $t = t(s),\ s \in [0;l]$ *este ecuația parametrică a conturului* Γ*, iar* t_l, $l = \overline{0,2n}$ *formează pe* Γ *sistemul de noduri Féjer (1).*

Atunci, pentru toate valorile numărului $n \geq n_1$*, unde* n_1 *este cel mai mic număr natural determinat de relația*

$$\frac{c_{17} + c_{18} \ln n_1}{n_1^{\sigma(\alpha)-\beta}} \leq q < 1,$$

SEAL (15) are soluție unică α_k, $k = \overline{-n,n}$*, iar șirul soluțiilor aproximative* $\varphi_n(t)$*, construit conform formulei (13), converge când* $n \to \infty$ *în norma spațiului* H_β^m *către soluția exactă* $\varphi(t)$ *a SEIS (11) pentru orice parte dreaptă* $f(t) \in H_\alpha^m$*. Pentru viteza de convergență a șirului soluțiilor aproximative este adevărată estimația*

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{\beta,m} \leq \frac{c_{19} + c_{20} \ln n}{n^{\sigma(\alpha)-\beta}},$$

în care $\sigma(\alpha) = \alpha$ *când* $\alpha \in (0;1)$ *și* $\sigma(1) = 1 - \delta,\ \delta > 0$ *este un număr arbitrar oricât de mic.*

Demonstrație. Schema de calcul (13), (14) scrisă sub formă operatorială ia următorul aspect:

$$(M_n \varphi_n \equiv)(L_n M \varphi_n)(t) = (L_n f)(t), \tag{17}$$

unde L_n este operatorul de interpolare Lozinski, definit de formulele (2), (3).

În virtutea condițiilor 2)-4) ale teoremei 2, MF $B^{-1}(t)A(t)$ admite factorizare canonică de stânga în raport cu conturul Γ:

$$B^{-1}(t)A(t) = C_+(t)C_-(t),\ t \in \Gamma, \tag{18}$$

unde $C_+^{\pm 1}(t) \in P[H_\alpha^{m\times m}],\ C_-^{\pm 1}(t) \in Q[H_\alpha^{m\times m}] \oplus \{const\}$. Atunci, SEIS (12) se poate reprezenta sub forma echivalentă

$$(\tilde{M}\varphi \equiv)((V + K_1 + K_2)\varphi)(t) = f_1(t), \tag{19}$$

în care $V = PC_- + QC_+^{-1},\ K_1 = QC_-P + PC_+^{-1}Q,\ K_2 = C_+^{-1}B^{-1}K,\ f_1(t) = C_+^{-1}(t)B^{-1}(t)f(t)$.

Spre deosebire de cazul metodei de colocații sau cel al cuadraturilor mecanice [7], ecuația operatorială (17) ce descrie metoda subdomeniilor nu este echivalentă ecuației

$$(\tilde{M}_n \tilde{\varphi}_n \equiv)(L_n(V + K_1 + K_2)T_n \tilde{\varphi}_n)(t) = (L_n f_1)(t). \tag{20}$$

De aceea, demonstraţia teoremei 2 se va efectua în două etape:

1) Se va arăta că începând cu careva număr n ecuaţia (20) are soluţie unică, iar şirul de soluţii $\tilde{\varphi}_n$ converge către soluţia ecuaţiei (19) (care este şi soluţia ecuaţiei (12));

2) Se va arăta că pentru şirul de soluţii φ_n, generat conform metodei subdomeniilor, are loc

$$\|\varphi_n - \tilde{\varphi}_n\|_{\beta,m} \to 0,\ n \to \infty .$$

Drept urmare, vom avea $\|\varphi_n - \varphi\| \le \|\varphi_n - \tilde{\varphi}_n\| + \|\tilde{\varphi}_n - \varphi\| \to 0,\ n \to \infty$. La fel se va obţine o estimare a vitezei de convergenţă a şirului soluţiilor aproximative φ_n către soluţia exactă φ.

Etapa 1. Vom considera ecuaţiile (19) şi (20) în spaţiul H^m_β şi, respectiv, subspaţiul $P_n^{\ m} := [P_n]_m$. În $P_n^{\ m}$ se introduce aceeaşi normă ca şi în H^m_β. Utilizând un rezultat ce ţine de teoria metodelor aproximative pentru rezolvarea ecuaţiilor operatoriale, stabilit de Gabdulkhaev (*a se vedea* teorema 7 în [4]), vom arăta că pentru n suficient de mari operatorul $L_n(V + K_1 + K_2)T_n$, definit de membrul stâng al ecuaţiei (20), este inversabil ca operator ce acţionează în subspaţiul $P_n^{\ m}$. Pentru orice $x_n \in P_n^{\ m}$ avem:

$$\|\tilde{M}x_n - \tilde{M}_n x_n\|_{\beta,m} \le \|g_1 - L_n g_1\|_{\beta,m} + \|g_2 - L_n g_2\|_{\beta,m}, \tag{21}$$

unde $g_1 := Vx_n$, $g_2 := (K_1 + K_2)x_n$. Deoarece $C_-, C_+^{-1} \in H^{m\times m}_\alpha, x_n \in H^m_\alpha$, evident că $g_1 \in H^m_{\sigma(\alpha)}$. Atunci, conform teoremei 1, vom avea:

$$\|g_1 - L_n g_1\|_{\beta,m} \le \frac{c_1 + c_2 \ln n}{n^{\sigma(\alpha)-\beta}} H(g_1;\alpha)\ \ (0 < \beta < \alpha \le 1). \tag{22}$$

În [7, p.87], cu ajutorul condiţiilor 2) şi 5) ale teoremei 2, s-a arătat că $K_1 + K_2 : H^m_\beta \to H^m_\alpha\ (0 < \beta < \alpha \le 1)$, iar pentru fiecare $y(t) \in H^m_\beta$ are loc inegalitatea $H((K_1 + K_2)y;\alpha) \le c_{21}\|y\|_{\beta,m}$. În cazul de faţă $x_n(t) \in H^m_\alpha \subset H^m_\beta\ (\beta < \alpha)$ şi, de aceea, $(K_1 + K_2)x_n \in H^m_\alpha$, iar $H((K_1 + K_2)x_n;\alpha) \le c_{21}\|x_n\|_{\beta,m}$. Atunci, conform teoremei 1, avem:

$$\|g_2 - L_n g_2\|_{\beta,m} \le \frac{c_1 + c_2 \ln n}{n^{\alpha-\beta}} H((K_1 + K_2)x_n;\alpha) \le \frac{c_{22} + c_{23} \ln n}{n^{\alpha-\beta}} \|x_n\|_{\beta,m}. \tag{23}$$

În baza inegalităţilor (22) şi (23) în relaţia (21) obţinem:

$$\|\tilde{M}x_n - \tilde{M}_n x_n\|_{\beta,m} \le \varepsilon_n \|x_n\|_{\beta,m},\ \forall x_n \in P_n^{\ m}, \tag{24}$$

unde $\varepsilon_n := \dfrac{c_{24} + c_{25} \ln n}{n^{\sigma(\alpha)-\beta}} \to 0, n \to \infty$.

Deoarece ecuaţiile (19) şi (12) sunt echivalente, conform condiţiilor 2)-6) ale teoremei 2, operatorul $\tilde{M}$ este inversabil în H^m_β.

Uşor se verifică că $\tilde{M}^{-1}f_1 = M^{-1}f$ şi atunci $\|\tilde{M}^{-1}\| \le c_{26}$, unde $c_{26} := \|M^{-1}\|\|BC_+\|$. În baza condiţiilor 2) şi 3) ale teoremei 2, pentru orice vector-funcţie (VF) $f(t) \in H^m_\alpha$ avem $f_1(t) = C_+^{-1}(t)B^{-1}(t)f(t) \in H^m_\alpha$ şi atunci, conform teoremei 1, obţinem:

$$\|f_1(t) - (L_n f_1)(t)\|_{\beta,m} \le \delta_n, \tag{25}$$

unde $\delta_n := \dfrac{c_1 + c_2 \ln n}{n^{\alpha-\beta}} H(f_1;\alpha) \to 0,\ n \to \infty$. Acum, ţinând cont de inegalităţile (24) şi (25), conform teoremei 7 din [4] conchidem că pentru fiecare n ce satisface inegalităţii

$$\xi_n := c_{26}\varepsilon_n \le q < 1, \tag{26}$$

ecuația (20) are o singură soluție $\tilde{\varphi}_n(t)=\sum\limits_{k=-n}^{n}\tilde{\alpha}_k t^k$ pentru orice parte dreaptă din $P_n^{\,m}$, iar şirul de soluții $\tilde{\varphi}_n(t)$ converge către soluția $\varphi(t)$ a ecuației (19). Pentru viteza de convergență are loc estimația:

$$\|\varphi(t)-\tilde{\varphi}_n(t)\|_{\beta,m}\le\frac{c_{26}}{1-q}(\xi_n\|f_1\|_{\beta,m}+\delta_n)\le\frac{c_{27}+c_{28}\ln n}{n^{\sigma(\alpha)-\beta}}. \tag{27}$$

Etapa 2. Fie $\varphi_n(t)=\sum\limits_{k=-n}^{n}\alpha_k t^k$ şi $\tilde{\varphi}_n(t)=\sum\limits_{k=-n}^{n}\tilde{\alpha}_k t^k$ sunt soluțiile ecuațiilor (17) şi, respectiv, (20). Coeficienții α_k, $k=\overline{-n,n}$, sunt soluția sistemului (15), iar $\tilde{\alpha}_k$, $k=\overline{-n,n}$, a unui SEAL analog, definit de ecuația (20). Ecuația (20) este echivalentă ecuației

$$L_n(Q(AP+BQ+T)\tilde{\varphi}_n)=L_n(Qf), \tag{28}$$

unde $Q(t):=(C_+(t))^{-1}B^{-1}(t)$. Pentru l fixat ($l=\overline{0,2n}$) vom înmulți ambii membri ai ecuației matriceale definite de sistemul (15) la matricea $Q(t_l),\ t_l=t(s_l)$. Ținând cont că $Q(t)\neq 0,\ t\in\Gamma$, drept rezultat, vom obține un sistem echivalent. În spațiul finit-dimensional $X_{m(2n+1)}$ de vectori cu $m(2n+1)$ componente complexe, în care norma este definită ca suma modulelor componentelor, considerăm ultimul sistem şi cel definit de ecuația (28)

$$N\varsigma=g,\qquad \tilde{N}\tilde{\xi}=\tilde{g},$$

unde $N=\{N_{lk}\},\ \tilde{N}=\{\tilde{N}_{lk}\},\ g=\left\{\int\limits_{s_l}^{s_{l+1}}Q(t_l)f(t(s))ds\right\},\ \tilde{g}=\left\{\int\limits_{s_l}^{s_{l+1}}Q(t(s))f(t(s))ds\right\},\ \varsigma=\{\alpha_k\},\ \tilde{\xi}=\{\tilde{\alpha}_k\},\ l=\overline{0,2n}$,

$k=\overline{-n,n}$, $\quad N_{lk}=\int\limits_{s_l}^{s_{l+1}}Q(t_l))R(t(s))ds,\ \tilde{N}_{lk}=\int\limits_{s_l}^{s_{l+1}}Q(t(s))R(t(s))ds,\ R(t(s))=P(t(s))[t(s)]^k+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}K(t(s),\tau)\tau^k d\tau$,

$P(t(s))=\begin{cases}A(t(s)),\ k=\overline{0,n}\\ B(t(s)),\ k=\overline{-n,-1}\end{cases}$. Ținând cont că norma de vector introdusă în spațiul $X_{m(2n+1)}$ este compatibilă cu următoarea normă de matrice $\|W\|=\max\limits_{j}\sum\limits_{i=1}^{m(2n+1)}|W_{ij}|$ $(W=\{W_{ij}\}_{i,j=1}^{m(2n+1)})$, vom estima norma $\|N-\tilde{N}\|$.

Dacă $P(t)=\{p_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{m}$, $Q(t)=\{q_{ri}(t)\}_{r,i=1}^{m}$, iar $\varsigma=(\alpha_{-n,1},...,\alpha_{-n,m},\alpha_{-n+1,1},\ ...,\alpha_{-n+1,m},...,\alpha_{n,1},...,\alpha_{n,m})^T$.

Atunci, simplu se verifică că $N-\tilde{N}$ este o matrice în blocuri de dimensiune $(2n+1)\times(2n+1)$, fiecare element al căreia reprezintă o matrice pătrată de ordinul m:

$$N-\tilde{N}=\left\{\left\{\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{s_l}^{s_{l+1}}(q_{ri}(t_l)-q_{ri}(t(s)))\rho_{ij}^{(k)}(t(s))ds\right\}_{\substack{r=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,m}}}\right\}_{\substack{l=\overline{0,2n}\\ k=\overline{-n,n}}},$$

unde $\rho_{ij}^{(k)}(t(s)):=p_{ij}(t(s))[t(s)]^k+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}h_{ij}(t(s),\tau)\tau^k d\tau$. Astfel, vom avea:

$$\|N-\tilde{N}\|=\max_{\substack{k=\overline{-n,n}\\ j=\overline{1,m}}}\sum_{l=0}^{2n}\sum_{r=1}^{m}\left|\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{s_l}^{s_{l+1}}(q_{ri}(t_l)-q_{ri}(t(s)))\rho_{ij}^{(k)}(t(s))ds\right|\le$$

$$\le\max_{\substack{k=\overline{-n,n}\\ j=\overline{1,m}}}\sum_{r=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{0}^{\frown}|q_{ri}(t_l)-q_{ri}(t(s))||\rho_{ij}^{(k)}(t(s))|ds. \tag{29}$$

Mărimile $\left|q_{ri}(t_l)-q_{ri}(t(s))\right|,\ r,i=\overline{1,m}\ \ (q_{ri}\in H_\alpha(\Gamma))$ se estimează complet analog mărimii $\left|g(t_k)-g(t(s))\right|,\ s\in[s_k;s_{k+1}]$ din teorema 1:

$$\left|q_{ri}(t_l)-q_{ri}(t(s))\right|\le c_{29}\omega(q_{ri};\frac{1}{n})\le\frac{c_{30}H(q_{ri};\alpha)}{n^\alpha}\le\frac{c_{31}}{n^\alpha},\ i,r=\overline{1,m}. \qquad (30)$$

La fel, deoarece $p_{ij}(t)\in H_\alpha(\Gamma),\ h_{ij}(t,\tau)\in H_\alpha(\Gamma\times\Gamma)$, vom avea:

$$\left|\rho_{ij}^{(k)}(t(s))\right|\le c_{32},\ i,j=\overline{1,m},\ k=\overline{-n,n}. \qquad (31)$$

Atunci, în baza relațiilor (30) şi (31), din (29) avem:

$$\left\|N-\tilde{N}\right\|\le\frac{c_{33}}{n^\alpha}m^2=\frac{c_{34}}{n^\alpha}\to 0,\ n\to\infty. \qquad (32)$$

Vom estima acum norma $\left\|g-\tilde{g}\right\|$. Avem:

$$\left\|g-\tilde{g}\right\|=\left\|\left\{\left\{\sum_{i=1}^{m}\int_{s_l}^{s_{l+1}}(q_{ri}(t_l)-q_{ri}(t(s)))f_i(t(s))ds\right\}_{r=\overline{1,m}}\right\}_{l=\overline{0,2n}}\right\|=\sum_{l=0}^{2n}\sum_{r=1}^{m}\left|\sum_{i=1}^{m}\int_{s_l}^{s_{l+1}}(q_{ri}(t_l)-q_{ri}(t(s)))f_i(t(s))ds\right|\le$$

$$\le\sum_{r=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\int_0^{\frown}\left|q_{ri}(t_l)-q_{ri}(t(s))\right|\left|f_i(t(s))\right|ds.$$

Acum, deoarece $f_i(t)\in H_\alpha(\Gamma),\ i=\overline{1,m}$, şi datorită relației (30), obținem:

$$\left\|g-\tilde{g}\right\|\le\frac{c_{34}}{n^\alpha}m^2=\frac{c_{35}}{n^\alpha}\to 0,\ n\to\infty. \qquad (33)$$

Inversabilitatea matricei $\tilde{N}$ (începând cu numerele n determinate din relația (26)) a fost demonstrată mai sus. Ținând cont de aceasta, de condițiile (32) şi (33), precum şi de inegalitatea $\frac{1}{n^\alpha}<\frac{\ln n}{n^{\alpha-\beta}},\ (0<\beta<\alpha\le 1)$, conform teoremei 7 din [4] putem afirma că pentru numerele n ce satisfac relației (26) sistemul $N\varsigma=g$ are soluție unică şi $\left\|\varsigma-\tilde{\xi}\right\|=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=-n}^{n}\left|\alpha_{kj}-\tilde{\alpha}_{kj}\right|\le\frac{c_{37}}{n^\alpha}\ \ (\alpha\in(0;1])$. De aici rezultă că, pentru numerele n definite de relația (26), SEAL (15) are soluție unică şi

$$\left\|\varphi_n(t)-\tilde{\varphi}_n(t)\right\|_{C^m}=\sum_{j=1}^{m}\left\|\sum_{k=-n}^{n}(\alpha_{kj}-\tilde{\alpha}_{kj})t^k\right\|_C\le c_{38}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=-n}^{n}\left|\alpha_{kj}-\tilde{\alpha}_{kj}\right|\le\frac{c_{39}}{n^\alpha}. \qquad (34)$$

Vom estima mărimea $H(\varphi_n-\tilde{\varphi}_n;\beta)$. Avem $H(\varphi_n-\tilde{\varphi}_n;\beta)=\sum_{j=1}^{m}H\left(\sum_{k=-n}^{n}(\alpha_{kj}-\tilde{\alpha}_{kj})t^k;\beta\right)$. Pentru j fixat $(j=\overline{1,m})$ vom considera polinoamele $p_n(t):=\sum_{k=-n}^{n}(\alpha_{kj}-\tilde{\alpha}_{kj})t^k$. Având $t',t''\in\Gamma$, vom separa două cazuri:

$$\text{a) } \left|t'-t''\right|\le\frac{1}{n};\quad \text{b) } \left|t'-t''\right|>\frac{1}{n}.$$

În primul caz, ținând cont că $p_n(t)\in H_\alpha(\Gamma),\ \forall\alpha\in(0;1]$, vom avea:

$$\gamma_n:=\frac{\left|p_n(t')-p_n(t'')\right|}{\left|t'-t''\right|^\beta}\le\frac{H(p_n;\alpha)\left|t'-t''\right|^\alpha}{\left|t'-t''\right|^\beta}\le H(p_n;\alpha)\frac{1}{n^{\alpha-\beta}}\ \ (0<\beta<\alpha\le 1),$$

şi atunci $H(p_n;\beta)=\sup_{t'\ne t''}\gamma_n\le H(p_n;\alpha)\frac{1}{n^{\alpha-\beta}}$, iar

$$H(\varphi_n - \tilde{\varphi}_n;\beta) = \sum_{j=1}^{m} H\left(p_n;\beta\right) \le \frac{mH\left(p_n;\alpha\right)}{n^{\alpha-\beta}} \le \frac{c_{40}}{n^{\alpha-\beta}}. \tag{35}$$

În cel de-al doilea caz vom utiliza estimaţia (34) şi vom obţine:

$$H(\varphi_n - \tilde{\varphi}_n;\beta) = \sum_{j=1}^{m} \sup_{t'\ne t''} \gamma_n \le \sum_{j=1}^{m} \sup_{t'\ne t''} \frac{\left|p_n(t')\right| + \left|p_n(t'')\right|}{\left|t'-t''\right|^{\beta}} \le$$

$$\le 2\sum_{j=1}^{m} \left\| \sum_{k=-n}^{n} (\alpha_{kj} - \tilde{\alpha}_{kj}) t^k \right\|_C \sup_{t'\ne t''} \frac{1}{\left|t'-t''\right|^{\beta}} \le \frac{2c_{39}}{n^{\alpha-\beta}}. \tag{36}$$

Estimaţiile (35) şi (36) împreună ne dau

$$H(\varphi_n - \tilde{\varphi}_n;\beta) \le \frac{c_{41}}{n^{\alpha-\beta}},\ 0<\beta<\alpha\le 1, \tag{37}$$

iar în baza relaţiilor (34) şi (37), obţinem $\left\|\varphi_n(t) - \tilde{\varphi}_n(t)\right\|_{\beta,m} \le \frac{c_{42}}{n^{\alpha-\beta}}$. De aici, ţinând cont şi de relaţia (27), obţinem:

$$\left\|\varphi(t) - \varphi_n(t)\right\|_{\beta,m} \le \frac{c_{19} + c_{20}\ln n}{n^{\sigma(\alpha)-\beta}},\ 0<\beta<\alpha\le 1.$$

Astfel, teorema 2 este demonstrată.

Referinţe:

1. Иванов В.В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. - Киев: Наукова Думка, 1968. - 287 c.
2. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. - Москва: Наука, 1971. - 352 c.
3. Prossdorf S., Silbermann B. Projektionsverfahren und die naherungsweise losung singularer gleichungen. - Leipzig: Teubner-Texte, 1977. - 227 c.
4. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. - Казань: Госуниверситет, 1980. - 232 c.
5. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. - Москва: Наука, 1985. - 256 c.
6. Prössdorf S., Silbermann B. Numerical analysis for integral and related operator equations.- Berlin: Akademie Verlag, 1991. - 542 p.
7. Золотаревский В.А. Конечномерные методы решения сингулярных интегральных уравнений на замкнутых контурах интегрирования. - Кишинев: Штиинца, 1991. - 136 c.
8. Кадушин В.П. Об одном полиномиальном методе решения систем сингулярных интегральных уравнений // Известия высших учебных заведений. Математика. - 1978. - №4 (191). - C.43-51.
9. Габдулхаев Б.Г., Ермолаева Л.Б. Один новый полиномиальный оператор и его приложения // Теория приближения функций. - Москва: Наука, 1987, c.98-100.
10. Ермолаева Л.Б. Решение интегральных уравнений методом подобластей // Известия высших учебных заведений. Математика. - 2002. - №9 (484). - C.37-49.
11. Золотаревский В., Сокиркэ А., Вулпе С. Интерполирование функций в комплексной области и приложения // Analele ATIC, 2003, vol.I(IV). - Chişinău: Evrica, c.129-147.
12. Zolotarevskii V.A., Al-Sabayleh M., Vulpe S.I., Sokirke A.I. Application of the subdomain method to the approximate solution of singular integral equations on closed integration contours // Differential Equations. - 2004. - Vol.40. - No9. - P.1313-1320.
13. Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. - Москва: Мир, 1979. - 493 c.

Prezentat la 05.11.2008