STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2020, nr.2(132)
Seria "Științe exacte și economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.93-98

CZU: [519.863 + 330.4]:005.52 **DOI: http://doi.org/10.5281/zenodo.3978173**

O SOLUŢIE APROXIMATIVĂ A PROBLEMEI COMIS-VOIAJORULUI FOLOSIND UN SET DE EURISTICI

Dmitri TERZI

Universitatea de Stat din Moldova

A fost dezvoltată și investigată experimental o metodă de soluționare a problemei comis-voiajorului folosind un set de euristici. Complementaritatea, polinomialitatea algoritmică și semnificația practică a euristicii au fost principalele criterii pentru includerea ei într-un set pentru a aborda spre crearea unei metode precise de rezolvare a problemelor cu o dimensiune suficient de mare într-un timp rezonabil.
Cuvinte cheie: *problema comis-voiajorului, algoritm euristic, soluție aproximativă*.

AN APPROXIMATE SOLUTION TO THE TRAVELING SALESMAN PROBLEM USING A SET OF HEURISTICS

A method of solving the commissioner's problem using a set of heuristics was developed and investigated experimentally. Complementarity, algorithmic polynomiality and the practical significance of heuristics were the main criteria for including it in a set in order to approach the creation of a precise method of solving many problems in a reasonable time.
Keywords: *traveling salesman problem, heuristic algorithm, approximate solution*.

Introducere

Modelele și metodele economico-matematice pot fi utilizate pe scară largă în analiza economică. Aplicarea lor este constrânsă de dificultatea unei descrieri adecvate a procesului de producție, de necesitatea obținerii de soluții în condițiile unei dimensionalități ridicate a sarcinilor, precum și de lipsa calificărilor suficiente ale personalului managerial pentru acest caz.

Metodele de cercetare în analiza economică sunt împărțite în două grupuri generale: calitativ și cantitativ. Unul dintre tipurile de tehnici de calitate este euristic, care este o combinație de tehnici logice și reguli metodologice de cercetare teoretică și de căutare a unei soluții acceptabile. Tehnicile euristice se bazează într-o oarecare măsură pe intuiție, experiență, conjectură, ingeniozitate și căutare creativă a specialiștilor în rezolvarea problemelor economice. Sunt utile în special pentru rezolvarea modelelor economice discrete, deoarece găsirea soluției optime necesită, de obicei, o căutare exhaustivă.

În cazul general, algoritmii euristici nu pot găsi soluția optimă (exactă). Cu toate acestea, aplicarea lor la o sarcină practică duce la recomandări mult mai bune decât la o decizie arbitrară și aleatorie. Acest lucru se aplică, de exemplu, clasei de probleme discrete practice, în special problemei comis-voiajorului, pentru soluția căreia sunt propuse tehnici euristice care permit obținerea unei soluții aproximative într-un timp rezonabil.

Condițiile problemei comis-voiajorului sunt adesea identificate ca urmare a luării în considerare a unei anumite rețele de comunicare, care poate fi reprezentată ca un graf $G=(V,E)$, unde *V* este setul de vârfuri și *E* este setul de arcuri, de exemplu: o hartă a orașelor unei țări, pe care orasele alcătuiesc numeroasele varfuri, iar drumurile care leaga aceste orase sunt arcuri.

Grafurile pot fi reprezentate analitic sub forma unei matrice a distanțelor reciproce între puncte. Un traseu într-un grafic G este o secvență de vârfuri în care o pereche de vârfuri învecinate este un arc al unui graf. O cale care leagă două vârfuri date ale unui graf este un traseu care leagă această pereche de vârfuri și nu conține arcuri repetate. Un contur hamiltonian este o cale specifică în care punctul de plecare corespunde punctului de sfârșit și toate vârfurile sale sunt distincte. Problema comis-voiajorului este problema de a găsi calea hamiltoniană cu cea mai scurtă lungime într-un graf finit.

Se presupune că oricare două vârfuri ale grafului în cauză sunt conectate în ambele direcții. Este cunoscut faptul că determinarea rutei optime în problema comis-voiajorului este o problemă NP-dificilă [1-5], pentru care nu a fost construit un algoritm de soluție eficientă. Prin urmare, metodele euristice pentru determinarea unei soluții aproximative a problemei comis-voiajorului sunt studiate folosind un exemplu cu o matrice simetrică și folosind transformări ale matricei de distanță între orașe.

Construirea unei matrice de distanțe pentru problema comis-voiajorului poate fi realizată prin două modalități. Prima metodă constă în calcularea matricei distanțelor d_{ij} dintre vârfurile *i* și *j* în conformitate cu coordonatele dreptunghiulare ale vârfurilor luate de pe harta orașelor sau prin coordonate geografice cu conversia lor în dreptunghiulare.

Al doilea mod este de a calcula cea mai scurtă distanță între vârfurile de-a lungul căilor reale între puncte. În acest caz, algoritmul care rezolvă această problemă este următorul. Pentru acest grafic de comunicare, presupunem că distanța dintre punctele *i* și *j* este egală d_{ij}^0.

Valoarea d_{ij}^0 este limitată, $d_{ij}^0 < \infty$, dacă punctele sunt direct conectate de arcuri elementare, şi nelimitată, $d_{ij}^0 = \infty$, dacă este imposibil să treci dintr-un punct în altul, ocolind celelalte vârfuri ale graficului, desigur, $d_{ii}^0 = 0$.

Se construiește un set de cantități d_{ij}^k, *k=1,2,3, …* , folosind algoritmul Floyd sau următoarea regulă [6]

$$d_{ij}^k = \min_l (d_{il}^{k-1} + d_{lj}^0),\ \ \mathrm{k} = 1,2,3,...,\mathrm{r},$$

unde *r* este determinat din condiția $d_{ij}^r = d_{ij}^{r-1}$.

Matricea $\{d_{ij}^r\}$ este matricea celor mai scurte distanțe între oricare două puncte ale rețelei. Pentru a descrie proprietățile graficului complet în care se caută ruta hamiltoniană, elementele zero ale matricei $\{d_{ij}^r\}$ de-a lungul diagonalei principale sunt înlocuite cu un număr suficient de mare.

Descrierea euristicilor

Utilizarea unui set de algoritmi euristici duce la rute apropiate de ruta optimă. Studiul euristicii *E1-E4* pentru includerea într-un astfel de set se bazează pe cercetările lor experimentale pe o varietate de probleme de testare. Dacă cea mai bună soluție găsită de euristicile anterioare este îmbunătățită cu noua, atunci aceasta este inclusă în set.

Euristic E1. Construirea soluției ciclice pentru fiecare pereche.

Fie $\mathrm{c} = \{\mathrm{c}_{ij}\}$ este o matrice care coincide cu matricea originală $d = \{d_{ij}\}$ pentru problema comis-voiajorului. Pentru fiecare pereche (i_1, j_1), numărul punctului i_1 este introdus în setul I, numărul punctului j_1 este introdus în setul J și apoi se construiește o soluție ciclică admisibilă a problemei comis-voiajorului.

1. Pentru un număr fix de coloană, j_1, este selectat un rând cu un număr i_2, pentru care

$$c_{i_2, j_1} = \min_s c_{s, j_1},$$

unde *s* este numărul de linie de la *1* la *n*, care nu aparține setului I.

2. Numărul i_2 al liniei selectate este introdus în setul I și în conturul în construcție (i_1, j_1, i_2).

3. În matricea *c* elementul (i_2, j_1) este blocat, pentru a nu obține un ciclu incomplet. Pentru aceasta, se presupune că $c_{i_2 j_1} = M$, unde M – un număr destul de mare.

4. Cu un număr fix de linie i_2 selectați coloana cu numărul j_2, pentru care

$$c_{i_2, j_2} = \min_s c_{i_2, s},$$

unde s – numărul de linie de la *1* la *n*, care nu aparține setului J.

5. Numărul j_2 al coloanei selectate este introdus în setul J și în conturul în construcție (i_1, j_1, i_2, j_2).

6. Se presupune că elementul c_{j_2, i_2} al matricei *c* este egal cu un număr suficient de mare pentru a elimina posibilitatea intrării perechii (j_2, i_2) în conturul în construcție. Numărul j_2 este introdus într-un set J.

7. Numărul $j = j_2$ este fixat și mergeți la pasul 1. În continuare, se presupune că $j = j_2$, iar calculele continuă cu pasul 2.

Etapele *1-7* se repetă până când se obține o soluție ciclică completă.

Pentru a obține un număr mare de soluții de îmbunătățire și pentru a evalua statistic aparițiile arcurilor (i, j) în soluția optimă, în cadrul *E1* euristic se utilizează transformarea matricei originale și obținerea unei matrice c de lucru cu elementele

$$\mathrm{c}_{ij} = d_{ij} + p_i + q_j,$$

unde p_i şi q_j – numere distribuite la întâmplare uniform din intervalul (A, B) ales de cercetător. O astfel de transformare este posibilă, deoarece soluția optimă a problemei comis-voiajorului cu matricele $\{c_{ij}\}$ și $\{d_{ij}\}$ coincide.

Din soluțiile ciclice obținute este selectată soluția căreia îi corespunde lungimea minimă. Cea mai bună soluție obținută de prima euristică *E1* este cea inițială pentru a obține soluții noi îmbunătățite folosind următoarele euristice *E2-E4*.

Euristic E2. Se poate obține o îmbunătățire a soluției inițiale datorită schimbării locurilor a două elemente.

Fie i şi j numerele a două elemente ale soluției, $i < j$,

$$U = (1, 2, ..., i-1, i, i+1, ..., j-1, j, j+1, ..., n, 1)$$

Noua soluție are forma

$$V = (1, 2, ..., i-1, j, i+1, ..., j-1, i, j+1, ..., n, 1)$$

Diferența dintre lungimile rutelor este

$$\Delta_{ij} = d_{i-1,i} + d_{i,i+1} + d_{j-1,j} + d_{j,j+1} - d_{i-1,j} - d_{j,i+1} - d_{j-1,i} - d_{i,j+1}$$

Cu o valoare Δ_{ij} pozitivă, U este înlocuit cu un V și cu soluția V se caută următoarea soluție îmbunătățită.

Soluțiile de îmbunătățire găsite sunt utilizate pentru o evaluare statistică a afilierii tranzițiilor (de la punctul i la punctul j) la ruta optimă.

Dacă s-a constatat că o îmbunătățire a soluției este posibilă după trecerea celui de-al doilea euristic, folosim următoarea a treia euristică.

Euristic E3. Elementul *k* este inserat între celelalte două.

Decizia ciclică în construcție pe baza soluției inițiale U începe cu alegerea primei tranziții, primei perechi de puncte *(i,j)*, dar numerele rămase de puncte în cantitate *n-2* vor fi introduse conform următoarei scheme. Pentru prima pereche de puncte, un traseu parțial este selectat din trei opțiuni

$$(k, i, j), \quad (i, k, j) \text{ и } (i, j, k).$$

Să presupunem că a fost selectată o rută parțială (i_1, i_2, i_3) cu lungimea minimă. În pasul următor, al treilea euristic, sunt cercetate trasee parțiale:

$$(k, i_1, i_2, i_3), \; (i_1, k, i_2, i_3), \; (i_1, i_2, k, i_3) \text{ и } (i_1, i_2, i_3, k) \tag{1}$$

Cea mai bună dintre cele patru rute parțiale este selectată. În mod similar, procesul de calcul continuă până când se obține o rută ciclică completă $(i_1, i_2, i_3, ..., i_{n-2}, i_n)$ ca fiind cea mai bună dintre rutele parțiale construite prin analogie cu (1).

Euristic E4. Îmbunătățirea soluției admisibile folosind operația inversiune.

Unul dintre algoritmii euristici poate fi determinat astfel. Alegem un contur hamiltonian arbitrar și înlocuim cele două vârfuri adiacente în el. Dacă valoarea căii cade, atunci calea anterioară este amintită și treceți la următoarea pereche de puncte. Dacă traseul s-a îmbunătățit, atunci un nou circuit este stocat și tratat în mod analog.

Pentru o problemă cu condiții simetrice, unul dintre acești algoritmi este următorul. Luăm un contur la întâmplare $i_1, i_2, ..., i_n, i_1,$ care trece prin toate punctele grafului. Renumerăm din nou punctele grafului, astfel încât în conturul analizat se întâlnesc în secvență $1, 2, ..., n.$ Pentru două puncte *i* și *j*, $i < j,$ arbitrare ale acestui graf, se introduce o operație numită inversiune.

Scriem conturul original în următoarea formă

$$1, 2, ..., i-1, i, i+1, ..., i+k-1, i+k, j, j+1, j+2, ..., n-1, n, 1 \tag{2}$$

Inversiunea constă în cele ce urmează. Excludem arcurile *(i,i+1)* și *(j,j+1)* din conturul (2). În schimb, arcurile *(i, j)* și *(i + 1, j + 1)* sunt incluse în contur și întreaga cale situată între *i + 1* și *j* merge în direcția opusă. Ca urmare a unei astfel de operații, se obține un nou contur

$$1, 2, ..., i-1, i, i+1, j..., i+k, i+k-1, ..., i+1, j+1, j+2, ..., n-1, n, 1 \tag{3}$$

Diferența dintre lungimile contururilor (2) și (3) este egală cu

$$\Delta_{ij} = d_{i,i+1} + d_{j,j+1} - d_{i,j} - d_{i+1,j+1}$$

Cu un Δ_{ij} pozitiv, este posibil să îmbunătățiți conturul (2).

Exemplu de inversiune este prezentat în Figura 1.

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2020, nr.2(132)
Seria "Științe exacte și economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.93-98

Fig.1. Conturul a) până la inversiune de 1,2,3,4,5,6,7,8,1;
b) după inversiune de 1,2,3,7,6,5,4,8,1.

Algoritmic, soluția (3) este obținută după cum urmează, în funcție de i și j. Notăm soluţia iniţială (2) prin U. O soluţie îmbunătăţitoare V se obţine folosind următoarea transformare:

1) Se crede $V = U$;

2) Când $i+1 = j$, soluția V nu se schimbă. Inversiunea în acest caz nu conduce la o modificare a U;

3) Când $i+2 = j$, sunt produse înlocuirile $V_{i+1} = U_j$, $V_j = U_{i+1}$;

4) În alte cazuri, se efectuează înlocuirile $V_k = U_{j+i+1-k}$, $k = i+1, i+2, ..., j$.

În noul contur (3), într-un mod complet similar, se poate căuta o inversare favorabilă.

Pentru a studia posibilitățile practice ale euristicii, s-au efectuat experimente de calcul, în special, următoarele.

Partea experimentală

Experimentele au fost efectuate cu matrice de diferite dimensiuni $n <= 100$, care au arătat posibilitatea de a utiliza software-ul elasborat de autor pentru a rezolva problema metric a comis-voiajorului. De exemplu, pentru o problemă cu $n = 100$, soluția este prezentată în Figura 2.

Pentru a determina soluția, este necesar să specificați coordonatele (*x*, *y*) ale punctelor grafului:

x=(20, 22, 26.5, 24.5, 27.5, 36, 40, 44, 36.5, 34, 24.5, 29, 29, 26, 22, 14, 9, 3, 4.5, 7, 10, 4, 13, 12.5, 17, 11.5, 12, 19, 19.5 22, 21, 23, 26.5, 28.5, 29, 57, 23, 28.5, 33, 36.5, 45.5, 45.5, 46, 50, 50, 54.5, 51, 52, 55, 55, 66, 64, 63, 64, 63, 64.5, 62, 64, 62, 59, 58, 53, 50, 47, 42, 45, 45, 48.5, 51, 59, 66.5, 64, 60, 55, 56, 61, 64, 65, 66.5, 58.5, 50, 44, 41, 34, 35, 32, 26, 23.5, 23, 19, 14, 12, 11, 7, 6, 6, 1.5, 2.5, 15, 20);

y=(19, 16, 21, 23.5, 23, 22, 23, 22, 38, 46, 29, 37, 33, 32.5, 28.5, 34, 32.5, 36.5, 39, 47, 49, 55, 65, 56.5, 55, 45.5, 43.5, 48, 52, 53, 58.5, 58.5, 56, 57.5, 62, 62, 67, 66.5, 63, 68, 62, 57.5, 54, 51, 54, 60.5, 61.5, 64, 64, 67.5, 62.5, 60.5, 60, 58.5, 56, 54, 52, 49, 43, 43, 37, 45, 47, 42, 41.5, 40, 36, 38, 32.5, 24, 24, 18, 22.5, 16.5, 13.5, 14, 12, 11, 10, 10, 6, 15, 10, 13.5, 7, 8, 8.5, 5, 7, 8, 4, 3, 8, 9, 11, 18, 18, 21, 24, 19).

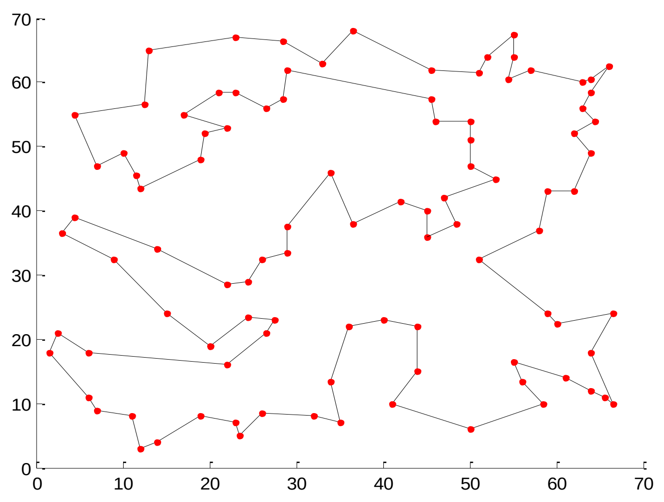

Fig.2. Ruta ocolitoare a 100 de puncte.

Se obține o soluție aproximativă
M = (67, 66, 65, 9, 10, 12, 13, 14, 11, 15, 16, 19, 18, 17, 99, 100, 1, 4, 5, 3, 2, 96, 98, 97, 95, 94, 93, 92, 91, 90, 89, 88, 87, 86, 85, 84, 6, 7, 8, 82, 83, 81, 80, 75, 74, 76, 77, 78, 79, 72, 71, 73, 70, 69, 61, 60, 59, 58, 57, 56, 55, 54, 51, 52, 53, 36, 46, 49, 50, 48, 47, 41, 40, 39, 38, 37),
prin care se calculează lungimea sa.

Următorul exemplu include date bazate pe o hartă a orașelor Moldovei [7]. Este necesară prezentarea unei rute care trece o singură dată prin fiecare din cele *36* de orașe ale Moldovei cu lungime minimă. În Tabel, numerele de la 1 la 36 indică orașele: Chișinău, Bălți, Comrat, Orhei etc.

Tabel

Nr. Oraşul	Nr. Oraşul	Nr. Oraşul	Nr. Oraşul
1 Briceni	10 Floreşti	19 Nisporeni	28 Leova
2 Ocniţa	11 Sângereni	20 Străşeni	29 Cimişlia
3 Edineţ	12 Rezina	21 Dubăsari	30 Căuşeni
4 Donduşeni	13 Soldăneşti	22 Cruileni	31 Cantemir
5 Râşcani	14 Rezina	23 Chişinău	32 Comrat
6 Drochia	15 Teleneşti	24 Ialoveni	33 Basarabeasca
7 Soroca	16 Ungeni	25 Hânceşti	34 Ştefan Vodă
8 Glodeni	17 Călăraşi	26 Anenii Noi	35 Cahul
9 Bălţi	18 Orhei	27 Tighina	36 Taraclia

Cea mai bună soluție ciclică *M*, determinată folosind euristicile *E1-E4*, este:

*M=(1, 3, 5, 8, 11, 9, 12, 15, 17, 16, 19, 20, 23, 24, 25, 28, 31, 35, 36,
32, 29, 33, 34, 30, 27, 26, 22, 21, 18, 14, 13, 10, 7, 6, 4, 2, 1).*

Dacă începeți cu primul oraș, 1 – Briceni, este recomandat să ocoliți orașele în secvența 3 – Edineț, 5 – Râșcani, 8 – Glodeni etc. Numerele de oraș acceptate sunt prezentate în Figura 3.

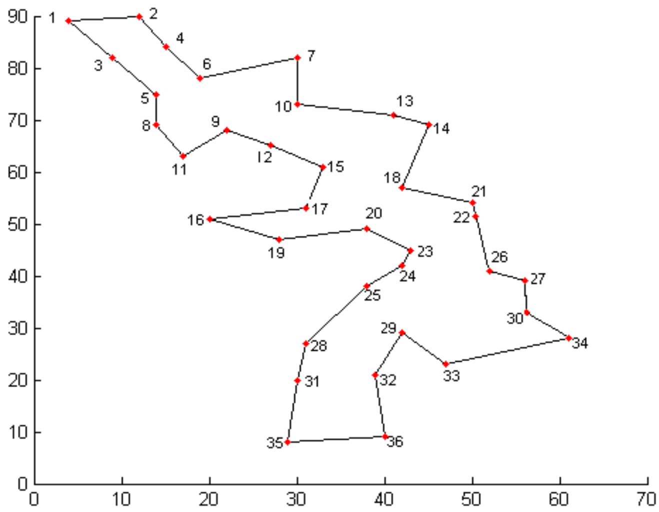

Fig.3. Ruta ocolitoare a orașelor din Moldova.

Precizia algoritmului aproximativ pentru soluționarea problemei comis-voiajorului este investigată, de exemplu, folosind o serie de teste special generate, cu o complexitate diferită. Setul rezultat de soluții acceptabile și îmbunătățitoare reprezintă statistici utile care sunt procesate. Rezultatele procesării sunt reprezentate de o matrice *n*-dimensională $H = \{h_{ij}\}$, în care h_{ij} – frecvența de apariție a elementului (k, l) în soluțiile îmbunătățite generate de euristicile *E1-E4*. Pe baza matricei *H* putem face o presupunere (euristică sau ipoteză) că elementul ei de (k, l) cu cea mai mare frecvență indică intrarea tranziției de la un punct k la altul l cu distanța d_{kl} în soluția optimă. Deci, matricea H poate fi utilizată pentru a dezvolta noi euristici.

Pentru exemplul considerat, s-a dovedit că arcurile soluției ciclice *M* obținute de patru euristici *E1-E4* sunt incluse în setul de arcuri corespunzătoare elementelor non-zero ale matricei H . Numărul de elemente zero ale matricei H este mult mai mic decât zero. Aceste informații pot fi utilizate pentru a reduce dimensiunea matricei originale și a găsi cea mai bună soluție.

Concluzii

Experimentele au arătat că pentru problemele cu o matrice tarifară simetrică pentru trecerea dintr-un punct în altul de dimensiuni medii, n <= 100, se pot obține soluții practic bune.

Referințe:

1. ПАПАДИМИТРИУ, Х., СТАЙГЛИЦ, К. *Комбинаторная оптимизация: Алгоритмы и сложность*. Москва: Мир, 1985.
2. https://www.swmath.org/software/983
3. ЧУСОВЛЯНКИН, А.А., МОРОЗЕНКО, В.В. Анализ точности и времени решения задачи коммивояжера с помощью "антижадного" алгоритма. В: *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. Вып. 4(35), 2016.
4. АСАНОВ, М., БАРАНСКИЙ, В., РАСИН, В.В. *Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы*. СПб.: Лань, 2010.
5. КОНОНОВ, А.В., КОНОНОВА, П.А. *Приближенные алгоритмы для NP-трудных задач.* Новосибирск: РИЦ НГУ, 2014.
6. МУДРОВ, В.И. *Задача о коммивояжере*. Москва: Знание, 1969.
7. http://www.maps-of-europe.com/maps/maps-of-moldova/political-and-administrative-map

Date despre autor:

Dmitri TERZI, doctor în ştiinţe matematice, conferenţiar universitar, Facultatea de Ştiinţe Economice, Universitatea de Stat din Moldova

E-mail: dgerterzi@yandex.ru

ORCID: 0000-0002-1518-4012

Prezentat la 10.02.2020