STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2020, nr.2(132)
Seria "Ştiinţe exacte şi economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.17-24

CZU: 517.968 + 517.98 **DOI: http://doi.org/10.5281/zenodo.3978134**

КРИТЕРИИ НЁТЕРОВОСТИ НЕКОТОРЫХ ВОЗМУЩЁННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Галина ВОРНИЧЕСКУ*[*], Василе НЯГУ

[*]*Тираспольский государственный университет*
Молдавский государственный университет

În această lucrare este studiată o clasă de operatori integrali singulari, perturbaţi cu operatori integrali cu singularităţi punctiforme. Teoria Noether a operatorilor din această clasă este construită pe baza formulelor de compoziţie definite ca axiome. Este obţinută formula pentru calcularea indicelui operatorilor noetherieni. S-a demonstrat că proprietăţile noetheriene şi indicele operatorilor singulari caracteristici sunt stabili în raport cu perturbarea lor cu anumiţi operatori liniari, mărginiţi şi necompacţi.

Cuvinte-cheie: *operator integral singular, operator noetherian, regularizare, simbol.*

NOETHERIAN CRITERIA FOR SOME PERTURBED INTEGRAL OPERATORS

In this paper, a class of single integral operators, perturbed with integral operators with point singularities, is studied. The Noether theory of the operators in this class is built on the composition formulas defined as axioms, the formula for calculating the index of the noetherian operators is established. It has been shown that the properties of the nonetherian properties and the index of the characteristic singular operators are stable in relation to their perturbation with certain linear operators, marginal and non-compact.

Keywords: *singular integral operator, noetherian operator, regularization, symbol.*

Пусть Γ – простой замкнутый, выпуклый контур на комплексной плоскости. Обозначим через $B(\Gamma)$ банахово пространство функций контура Γ, такое, чтобы оператор умножения на непрерывную функцию $(A\varphi)(t) = a(t)\,\varphi(t)$ был ограничен в пространстве $B(\Gamma)$ и $\|A\|_{B(\Gamma)} \le const\|a\|_{C(\Gamma)}$. Через $T(B(\Gamma))$ обозначим множество всех вполне непрерывных операторов, действующих в $B(\Gamma)$.

Пусть в пространстве $B(\Gamma)$ заданы линейные ограниченные операторы $M_1, M_2, \ldots M_n$ и S, удовлетворяющие следующим аксиомам:

1) для каждой функции $a \in C(\Gamma)$ существуют такие функции $a_k \in C(\Gamma)$, что операторы $M_k aI - a_k M_k$, $k = 1,2,\ldots,n$ вполне непрерывны в $B(\Gamma)$, причем, если $a(t) \ne 0$, то и $a_k(t) \ne 0$;

2) если $a \in C(\Gamma)$, то $SaI - aS$ вполне непрерывен в $B(\Gamma)$;

3) $S^2 = I$ $(S^2 \ne \pm I)$;

4) операторы $M_k a M_j$ вполне непрерывны при всех $a \in C(\Gamma)$ и $j,k = 1,2,\ldots,n$;

5) $M_k S = h_k M_k + T_k$ и $SM_k = \tilde{h}_k M_k + \tilde{T}_k$, где T_k и $\tilde{T}_k$ – вполне непрерывные операторы в $B(\Gamma)$, а функции $h_k(t)$ и $\tilde{h}_k(t)$ равны единице на некоторых интервалах $l_k(\subset \Gamma)$ и $\tilde{l}_k(\subset \Gamma)$ и, соответственно, минус единице на $\Gamma \setminus l_k$ и на $\Gamma\setminus\tilde{l}_k$.

Тривиальным примером операторов, удовлетворяющих аксиомам 1, 4, и 5, служат вполне непрерывные интегральные операторы, которые в этой работе не представляют интереса.

Пусть Γ – единичная окружность, $\Gamma = \{t|\,|t| = 1\}$, и α_k – некоторые комплексные числа. Введем следующие обозначения:

$$\Gamma_к = \{z: z = t - \alpha_k, t \in \Gamma\} \text{ и } \tilde{\Gamma}_k = \{z: z = t + \alpha_k, t \in \Gamma\}.$$

Если пересечение $\Gamma_к \cap \Gamma$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ состоит из двух различных точек, то аксиомы 1 – 5 удовлетворяют рассматриваемые в пространстве $B(\Gamma) = L_p(\Gamma)$ операторы

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \qquad (M_k\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t - \alpha_k} d\tau \text{ (см.[1,2]).}$$

В [2] было доказано, что операторы M_k, вообще говоря, не являются вполне непрерывными в $L_p(\Gamma)$. Однако если для некоторого $k = k_0$ выполнено неравенство $|\alpha_{k_0}| > 2$, тогда ядро соответствующего оператора M_{k_0} является непрерывной функцией на Γ и этот оператор вполне непрерывен в B (Γ).

Рассмотрим более подробно следующие два примера, когда а) $k = 2,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -1$ и б) $k = 2,\ \alpha_1 = 2, \alpha_2 = -2$. Операторы M_k имеют следующий вид:

а) $(M_1\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t - 1} d\tau,$ $\qquad (M_2\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t + 1} d\tau,$

б) $(M_1\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t - 2} d\tau,$ $\qquad (M_2\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t + 2} d\tau,$

а кривые $\Gamma_к$, $k = 1{,}2$, и $\tilde{\Gamma}_k, k = 1{,}2$ указаны на рисунках 1 и 2.

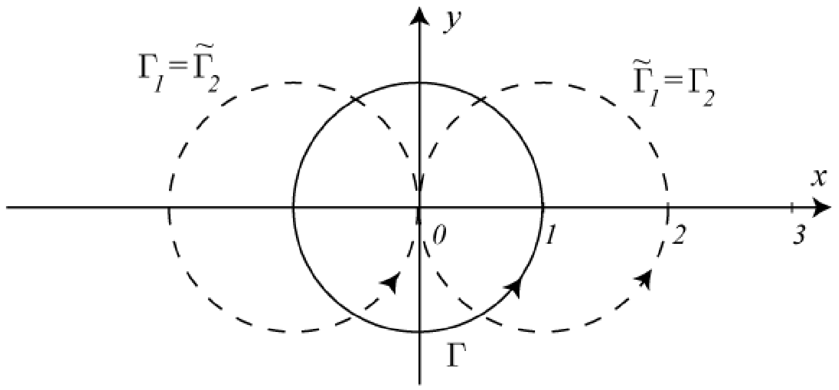

Рис.1.

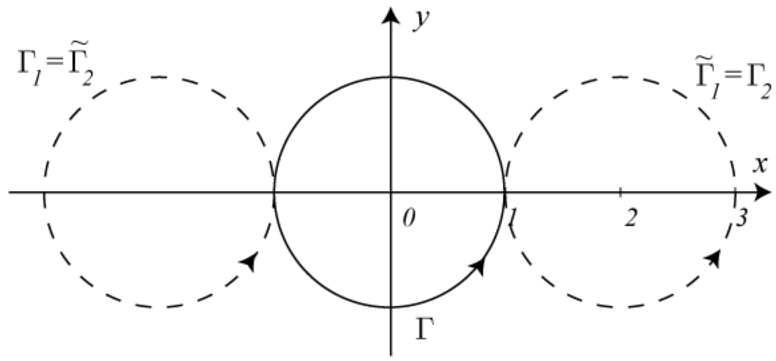

Рис.2.

Эти примеры представляют для нас некоторый интерес, и мы вернемся к ним ниже.

1. Критерии нётеровости оператора *A* с непрерывными коэффициентами

В пространстве B (Γ) рассмотрим оператор

$$A = aI + bS + \sum_{i=1}^{n} c_i M_i, \tag{1.1}$$

где $a, b, c_1, \ldots c_n$ − непрерывные на Γ функции, а операторы S и M_k удовлетворяют аксиомам 1-5.

Напомним, что оператор A называется нётеровым оператором (Ф-оператором), если 1) его множество значений замкнуто и 2) $dimkerA < \infty$ и $dimcokerA < \infty$. Индекс нётерового оператора, равный разности $dimkerA - dimcokerA$, будем обозначать через $IndA$.

Теорема 1.1 (см. [2]). *Для того чтобы оператор A был нётеровым в $B(\Gamma)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$a^2(t) - b^2(t) \neq 0\,,\ t \in \Gamma. \tag{1.2}$$

Если это условие выполнено, тогда индекс оператора A вычисляется по формуле

$$IndA = \frac{\mu}{\pi i}\left\{arg\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\right\}_{\Gamma}, \tag{1.3}$$

где μ - некоторое целое число, для нахождения которого необходимо подсчитать индекс одного оператора вида $aI + bS$.

Для доказательства теоремы 1.1 понадобится следующая лемма.

Лемма 1.1. *Оператор*

$$N = I + \sum_{k=1}^{n} c_k M_k\,,\ (c_k(t) \in C(\Gamma))$$

является нётеровым в пространстве $B(\Gamma)$ и его индекс равен нулю.

Действительно, так как (см.[2]) для каждой непрерывной функции $a(t)$ операторы $M_k a M_j$ вполне непрерывны, то

$$(I + \sum_{k=1}^{n} c_k M_k)\ (I - \sum_{k=1}^{n} c_k M_k) = I + T_1 \text{ и}$$
$$(I - \sum_{k=1}^{n} c_k M_k)\ (I + \sum_{k=1}^{n} c_k M_k) = I + T_2,$$

где T_1 и T_2 – вполне непрерывные операторы. Таким образом, оператор N допускает двустороннюю регуляризацию и в силу известной теоремы Аткинсона является нётеровым. Оператор

$$N_\lambda = I + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k M_k$$

при $0 \le \lambda \le 1$ осуществляет гомотопию оператора N в оператор $N_0 = I$, следовательно $IndN = 0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$ при всех $t \in \Gamma$. В силу аксиомы 1) существуют функции $a_k(t) \in C(\Gamma)$ и $b_k^2(t) \in C(\Gamma)$, такие, что операторы $M_k aI - a_k M_k$ и $M_k bI - b_k M_k$ вполне непрерывны, причем $a_k^2(t) - b_k^2(t) \neq 0$. Рассмотрим ограниченный в пространстве $B(\Gamma)$ оператор, определенный равенством

$$N = I + \sum_{k=1}^{n} c_k M_k\,,$$

в котором h_k – функции из аксиомы 5). Оператор A можно представить в виде

$$A = N(aI + bS) + T\,, \tag{1.4}$$

где $T \in \mathrm{T}(B(\Gamma))$. Так как $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, то оператор $aI + bS$ является нётеровым. Тогда из равенства (1.4) и Леммы 1.1 вытекает, что A также является нётеровым. Заметим еще, что из Леммы 1.1 следует, что $IndA = Ind(aI + bS)$.

Докажем необходимость. Допустим, что оператор A нётеров, а условие 1.2 не выполнено. Пусть для определенности $a(t) + b(t)$ обращается в нуль на Γ. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ нетрудно подобрать две непрерывные функции $g_1(t)$ и $g_2(t)$, такие, что

1) $g_j(t) \neq 0$ на Γ;

2) $\max\left|a(t) + b(t) - g_j(t)\right| < \varepsilon$, $j = 1,2$;

3) $\{\arg g_1(t)\}_\Gamma \neq \{\arg g_2(t)\}_\Gamma$.

Рассмотрим операторы

$$A_j = a^{(j)}I + b^{(j)}S + \sum_{k=1}^{n} c_k^{(j)} M_k,$$

где

$$a^{(j)} = \frac{1}{2}(g_j + a - b),\quad b^{(j)} = \frac{1}{2}(g_j - a + b),\ c_k^{(j)} = c_k\,, j = 1,2.$$

Операторы A_j $(j = 1,2)$ удовлетворяют условию $\|A - A_j\| < \alpha\varepsilon$, в котором α некоторая постоянная. Так как $(a^{(j)}(t) + b^{(j)}(t))(a^{(j)}(t) - b^{(j)}(t)) \neq 0$ на Γ, то в силу доказанного выше

A_j нётеровы, причем $IndA_j = Ind(a^{(j)}I + b^{(j)}S)$. На основании результатов работы [3] индекс оператора вида $aI + bS$ определяется формулой

$$Ind(aI + bS) = \frac{\mu}{\pi i}\left\{arg\,\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\right\}_{\Gamma}.$$

Здесь μ константа, для нахождения которой необходимо подсчитать индекс одного из операторов вида $aI + bS$. Следовательно,

$$Ind(a^{(j)}I + b^{(j)}S) = \frac{\mu}{\pi i}\left\{arg\,\frac{a^{(j)}(t) - b^{(j)}(t)}{a^{(j)}(t) + b^{(j)}(t)}\right\}_{\Gamma}$$

и в силу выбора функций $a^{(j)}$ и $b^{(j)}$ имеем $Ind(a^{(1)}I + b^{(1)}S) \neq Ind(a^{(2)}I + b^{(2)}S)$. Значит, $IndA_1 \neq IndA_2$.

С другой стороны, по теореме Аткинсона об устойчивости индекса, начиная с некоторого $\varepsilon_0 > 0$ (определяемого нётеровым оператором A), операторы A_j, удовлетворяющие условию $\|A - A_j\| < \varepsilon_0$, должны иметь одинаковый с A индекс, т.е. $IndA = IndA_1 = IndA_2$. Полученное противоречие заканчивает доказательство теоремы.

Из Теоремы 1.1 вытекает

Следствие 1.1. *Операторы $A = aI + bS + \sum_{k=1}^{n} c_k M_k$ и $A_0 = aI + bS$ только одновременно являются нётеровыми и их индексы совпадают.*

Таким образом, свойство оператора A_0 быть нётеровым устойчиво относительно возмущения его операторами вида $\sum_{k=1}^{n} c_k M_k$, хотя последние могут не быть вполне непрерывными.

Замечание. *Как было отмечено выше, индекс оператора $A_0 = aI + bS$ вычисляется по формуле*

$$IndA_0 = \frac{\mu}{2\pi}\left\{\arg\frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}\right\}_{\Gamma},$$

причем в качестве μ можно брать число $\mu = Ind[(1 + t)I + (1 - t)S]$, которое зависит лишь от конкретной реализации абстрактного оператора S, удовлетворяющего аксиомам 2, 3 и 5. Здесь, не ограничивая общности, мы считаем, что точка $z = 0$ лежит внутри области, ограниченной контуром Γ.

2. Линейное растяжение операторов и критерии нётеровости оператора A с матричными коэффициентами

Пусть $S, M_1, M_2, \dots M_n$ – линейные ограниченные операторы, действующие в пространстве $B^{m}(\Gamma) = B(\Gamma) \times B(\Gamma) \times \dots \times B(\Gamma)$, и $a(t)$ – оператор умножения на непрерывную матрицу-функцию порядка m. Если операторы S, M_j и aI удовлетворяют аксиомам 1-5, то справедлива

Теорема 2.1. *Для того чтобы оператор*

$$A = aI + bS + \sum_{k=1}^{n} c_k M_k$$

был нётеровым в $B^{m}(\Gamma)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\det(a(t) \pm b(t)) \neq 0.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству Теоремы 1.1. Для вычисления индекса нётерового оператора A используется результат С.Г.Михлина [3] о том, что индекс оператора $aI + bS$ $(S^2 = I)$ вычисляется по формуле

$$Ind(aI + bS) = \frac{\mu}{2\pi}\int_{\Gamma} d\arg\det[(a(t) + b(t))^{-1}(a(t) - b(t))],$$

где μ – некоторая постоянная. Например, если S – оператор сингулярного интегрирования с ядром Коши, то $\mu = 1$.

Следствие 2.1. *Операторы $A = aI + bS + \sum_{k=1}^{n} c_k M_k$ и $A_o = aI + bS$ одновременно являются или не являются нётеровыми и их индексы совпадают.*

Теперь рассмотрим более общие операторы вида

$$A = \sum_{j=1}^{r}\prod_{k=1}^{s}(a_{jk}I + b_{jk}S + \sum_{i=1}^{n} c_{jk}^{(i)} M_i), \tag{2.1}$$

где a_{jk}, b_{jk} и c_{jk} – функции из $C(\Gamma)$.

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2020, nr.2(132)
Seria "Ştiinţe exacte şi economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.17-24

Теорема 2.2. *Для того чтобы оператор, определенный равенством (2.1), был нётеровым в пространстве* $B\ (\Gamma)$, *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\sum_{j=1}^{r}\prod_{k=1}^{s}(a_{jk}\pm b_{jk})\neq 0.$$

Если это условие выполнено, то

$$IndA=\frac{\mu}{2\pi}\left\{arg\frac{\sum_{j=1}^{r}\prod_{k=1}^{s}(a_{jk}-b_{jk})}{\sum_{j=1}^{r}\prod_{k=1}^{s}(a_{jk}+b_{jk})}\right\}.$$

Доказательство этой теоремы основано на приведенном ниже вспомогательном предложении.

Пусть V – некоторая банахова алгебра, линейная ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве B, а $V^{(m)}$ – банахова алгебра элементов вида $\|A_{jk}\|_{j,k=1}^{m}$, где $A_{jk}\in V$. Если $B^{(m)}$ – банахово пространство векторов $X=[x_1,\dots,x_m]$ с элементами $x_j\in B$ и с нормой $\|X\|=\max_k\|x_k\|$, то $V^{(m)}$ является банаховой алгеброй линейных ограниченных операторов в пространстве $B^{(m)}$. Единичные операторы, действующие в пространствах V и $V^{(m)}$, обозначим через I и I_m соответственно; предположим также, что $I\in V$ и $I_m\in V^{(m)}$.

Пусть $A=\sum_{j=1}^{r}A_{j1}A_{j2}\cdots A_{js}$,

где $A_{jk}\in V$; оператор $\tilde{A}\in V^{(m)}$ называется [4] *линейным растяжением* оператора A (порядка m), если:

1) элементы матрицы $\tilde{A}$ являются линейными комбинациями элементов A_{jk} и единицы I;
2) существуют такие обратимые операторы X и Z из алгебры $V^{(m)}$, что

$$\tilde{A}=Y\cdot\begin{pmatrix}I_{m-1}&0\\0&A\end{pmatrix}\cdot Z. \tag{2.2}$$

Нетрудно заметить, что оператор $A=\sum_{j=1}^{r}A_{j1}A_{j2}\cdots A_{js}$ и его линейное растяжение $\tilde{A}$ (если оно существует) одновременно являются или не являются нётеровыми в пространствах B и $B^{(m)}$ соответственно и

$$dimkerA=dimker\tilde{A}\ \text{ и }\ dimcokerA=dimcoker\tilde{A}.$$

Имеет место следующая

Лемма[1] ***2.1.*** *Каждый элемент A из алгебры* V *вида* $A=\sum_{j=1}^{r}A_{j1}A_{j2}\cdots A_{js}$ $(A_{jk}\in V)$ *допускает линейное растяжение (порядка* $m\leq r(s+1)+1$*).*

Доказательство. Составим следующую матрицу порядка $r(s+1)$

$$M=\begin{Vmatrix}I_r&B_1&0&\dots&0\\0&I_r&B_2&\dots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0&\dots&B_s\\0&0&0&\dots\dots&I_r\end{Vmatrix},$$

в которой, в свою очередь,

$$B_k=\begin{Vmatrix}A_{1k}&0&\dots&0\\0&A_{2k}&\dots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0&A_{kk}\end{Vmatrix}.$$

Через F обозначим столбец длины $r(s+1)$, у которого верхние rs элементов равны нулю, а нижние r элементов равны единичному оператору. Пусть также

$G=\|I,\dots,I,0,\dots,0\|$ *(I-повторяется r раз,* $0-r\cdot s$ *раз).*

Нетрудно проверить справедливость разложения

$$\begin{pmatrix}M&F\\G&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_{m-1}&0\\H&I\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}I_{m-1}&0\\0&A\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}I_{m-1}&F\\0&I\end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

где $m=r(s+1)+1$, а

$$H=\|M_0,M_1,\dots,M_s\|,$$

[1] *Доказательство этой леммы можно найти в работе [4]. Здесь оно приводится, так как в дальнейшем используются некоторые его детали.*

в которой, в свою очередь,

$$M_0 = \|I, \dots, I\| \qquad (I\text{-повторяется } r \text{ раз) и}$$

$$M_k = \|A_{11}A_{12} \dots A_{1j}, A_{21}A_{22} \dots A_{2j}, \dots, A_{k1}A_{k2\dots} A_{rk}\| \ (k = 1,2, \dots, s).$$

Заметим теперь, что операторы

$$Y = \begin{pmatrix} I_{m-1} & 0 \\ H & I \end{pmatrix}, \qquad Z = \begin{pmatrix} I_{m-1} & F \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

обратимы в пространстве $B^{(m)}$ и обратными к ним являются операторы

$$Y^{-1} = \begin{pmatrix} I_{m-1} & 0 \\ -H & I \end{pmatrix}, \qquad Z^{-1} = \begin{pmatrix} I_{m-1} & -F \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

соответственно. Следовательно, оператор

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} M & F \\ G & I \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

является линейным растяжением оператора A. Лемма 2.1 доказана.

Так как крайние множители в правой части равенства (2.3) являются обратимыми операторами, то оператор A нормально является разрешимым и нётеровым в том и только в том случае, когда таковым является оператор $\tilde{A}$.

Доказательство теоремы 2.2. Наряду с оператором A рассмотрим и оператор

$$A_0 = \sum_{j=1}^{r} \prod_{k=1}^{s} (a_{jk} I + b_{jk} S).$$

Операторам A и A_0, действующим в пространстве $B(\Gamma)$, поставим в соответствие их линейное растяжение – операторы $\tilde{A}$ и $\tilde{A}_0$, действующие в пространстве $B^m(\Gamma)$ $(m = r(s + 1) + 1)$. Оператор $\tilde{A}$ имеет вид

$$\tilde{A} = \tilde{a}I + \tilde{b}S + \sum_{k=1}^{m} \tilde{c}_k M_k,$$

а оператор $\tilde{A}_0$ вид $\tilde{A}_0 = \tilde{a}I + \tilde{b}S$, где $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}_k$ матрицы-функции порядка m с элементами из $C(\Gamma)$. Согласно Лемме 2.1 операторы $A\,(A_0)$ и $\tilde{A}\,(\tilde{A}_0)$ лишь одновременно являются нётеровыми в соответствующих пространствах, причем $IndA = Ind\tilde{A}$ и $IndA_0 = Ind\tilde{A}_0$. В силу Теоремы 1.1 и Следствия 1.1 операторы $\tilde{A}$ и $\tilde{A}_0$ одновременно являются либо не являются нётеровыми и $Ind\tilde{A} = Ind\tilde{A}_0$. Так как оператор A_0 лишь вполне непрерывным слагаемым отличается от оператора $aI + bS$, где

$$a(t) = \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{r} \prod_{k=1}^{s} (a_{jk} + b_{jk}) + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{r} \prod_{k=1}^{s} (a_{jk} - b_{jk}),$$
$$b(t) = \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{r} \prod_{k=1}^{s} (a_{jk} + b_{jk}) - \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{r} \prod_{k=1}^{s} (a_{jk} - b_{jk}),$$

то осталось применить Теорему 2.1. Теорема доказана.

3. Пример операторов, реализующих аксиомы 1-5

Пусть Γ – единичная окружность, $\Gamma = \{t: |t| = 1\}$; α_k, $(k = 1, \dots, n)$ – некоторые симплексные числа, $|\alpha_k| < 2$; S и M_k – операторы, определённые равенствами

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \qquad (M_k\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t - \alpha_k} d\tau. \tag{3.1}$$

Введем следующие обозначения: $\Gamma_k = \{\varsigma: \varsigma = t - \alpha_k, t \in \Gamma\}$ и $\tilde{\Gamma}_k = \{\varsigma: \varsigma = t + \alpha_k, t \in \Gamma)$. На рис. 1 указаны контуры $\Gamma, \Gamma_1, \tilde{\Gamma}_1, \Gamma_2, \tilde{\Gamma}_2$ для $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, а на рисунке 2 – контуры $\Gamma, \Gamma_1, \tilde{\Gamma}_1, \Gamma_2, \tilde{\Gamma}_2$ для $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -2$. При условии, что числа α_k, $(k = 1, \dots, n)$ таковы, что пересечение $\Gamma_к \cap \Gamma$ состоит из двух различных точек $t_k^{(1)}, t_k^{(2)}$ (на рис.2 *это не выполняется*) и $\Gamma_j \cap \Gamma \cap \tilde{\Gamma}_k = \emptyset$ $(j, k = 1, .., n)$ (на рис.1 *это не выполняется*), в работе [2] доказывается, что операторы S и M_k, определённые равенствами (3.1), удовлетворяют аксиомам 1-5 настоящей работы. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Оператор*

$$(A\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t - \alpha_k} d\tau \tag{3.2}$$

нётеров в пространстве $L_p(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда нётеровым является оператор

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2020, nr.2(132)
Seria "Științe exacte și economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.17-24

$$(\mathrm{A}_0\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau. \qquad (3.3)$$

Последняя теорема устанавливает, что операторы вида

$$(K\varphi)(t) = \sum_{k=1}^n \frac{c_k(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t - \alpha_k}d\tau$$

с точечными особенностями являются Φ-допустимыми возмущениями (терминология из [5]) для сингулярных операторов с непрерывными коэффициентами, действующими в пространстве $L_p(\Gamma)$. Кроме того, эта теорема позволяет, в частности, выделить некоторые классы функций $k(t,\tau)$, для которых разность $A - B$ операторов

$$(A\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + \int_\Gamma \frac{k(t,\tau)}{\tau - t}\varphi(\tau)d\tau \quad \text{и} \quad (B\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + k(t,t)\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau$$

не является компактной, а операторы A и B одновременно являются либо не являются нётеровыми и $IndA = IndB$. Одновременно подчеркнём, что эти результаты получены при условии, что числа $\alpha_k, (k = 1, \dots, n)$ таковы, что $\Gamma_j \cap \Gamma \cap \tilde{\Gamma}_k = \emptyset$ $(j, k = 1, \dots, n)$. В связи с этим возникает вопрос, насколько эти условия существенны в теореме 3.1.

Покажем на примере, что в общем случае этими условиями нельзя пренебречь. Точнее, покажем, что если для некоторого j и k имеем $\Gamma_j \cap \Gamma \cap \tilde{\Gamma}_k \neq \emptyset$, тогда существует нётеровый оператор

$$(\mathrm{A}_0\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau,$$

для которого оператор

$$(A\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau + \sum_{k=1}^n \frac{c_k(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t - \alpha_k}d\tau$$

не является нётеровым.

Итак, пусть $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = -1$. Очевидно (см. рис.1), что $\Gamma_1 \cap \Gamma \cap \tilde{\Gamma}_2 \neq \emptyset$. В пространстве $L_p(\Gamma)$ рассмотрим оператор $A = \lambda I + M_1 + M_2$, где $\lambda \in ¢$ и

$$(M_1\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t - 1}d\tau, \qquad (M_2\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t + 1}d\tau.$$

Оператор $\mathrm{A}_0 = \lambda I$ является нётеровым для всех $\lambda \neq 0$. Допустим, что оператор $A = \lambda I + M_1 + M_2$ также нётеров для всех $\lambda \neq 0$. Тогда и оператор $B = \lambda I - M_1 - M_2$ является нётеровым для всех $\lambda \neq 0$. Согласно свойствам нётеровых операторов, произведение операторов A и B,

$$F = AB = \lambda^2 - M_1^2 - M_2^2 - M_1M_2 - M_2M_1$$

также является нётеровым. Так как $\Gamma_1 \cap \Gamma \cap \tilde{\Gamma}_1 = \emptyset$ и $\Gamma_2 \cap \Gamma \cap \tilde{\Gamma}_2 = \emptyset$, то [2] операторы M_1^2 и M_2^2 являются компактными в $L_p(\Gamma)$. Следовательно, оператор

$$\tilde{F} = \lambda I - (M_1M_2 + M_2M_1) \qquad (3.4)$$

является нётеровым при всех $\lambda \neq 0$. Для вычисления $(M_1M_2\varphi + M_2M_1\varphi)(t)$, где $\varphi \in L_p(\Gamma)$, в соответствующих интегралах изменим порядок интегрирования, затем для вычисления внутренних интегралов воспользуемся интегральной формулой Коши. Приведём соответствующие вычисления.

$$(M_1M_2\varphi + M_2M_1\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\tau - t - 1}\left(\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(s)}{s - \tau + 1}ds\right)d\tau + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\tau - t + 1}\left(\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(s)}{s - \tau - 1}ds\right)d\tau =$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(s)}{s - t}\left[\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \left(\frac{1}{\tau - t - 1} - \frac{1}{\tau - s - 1}\right)d\tau\right]ds + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(s)}{s - t}\left[\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \left(\frac{1}{\tau - t + 1} - \frac{1}{\tau - s + 1}\right)d\tau\right]ds =$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(s)}{s - t}\left[\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \left(\frac{1}{\tau - t - 1} + \frac{1}{\tau - t + 1}\right)d\tau\right]ds - \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(s)}{s - t}\left[\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \left(\frac{1}{\tau - s - 1} + \frac{1}{\tau - s + 1}\right)d\tau\right]ds =$$

$$\frac{g(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(s)}{s - t}ds - \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{g(s)\varphi(s)}{s - t}ds,$$

где

$$g(t)=\begin{cases} 2, \text{ если } & t\in l_1\cup l_2 \\ 0, \text{ если } & t\in \Gamma\backslash l_1\cup l_2 \end{cases},$$

l_1 (l_2) – часть контура Г, находящегося внутри области, ограниченной контуром Γ_1 (Γ_2) (см. рис.3).

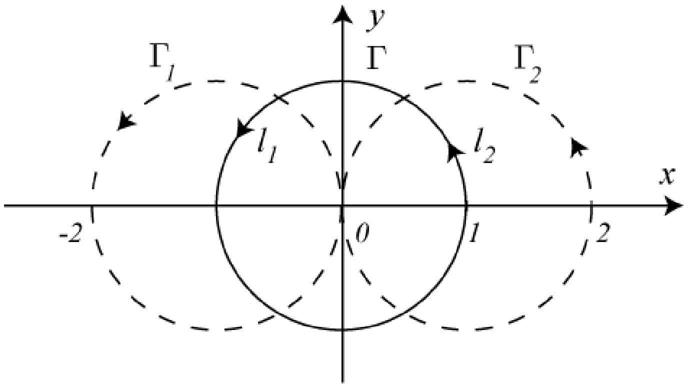

Рис.3.

Следовательно, оператор (3.4) имеет вид

$$\tilde{F}=\lambda I-(gS-SgI).$$

Оператор $\tilde{F}$ принадлежит алгебре, порождённой сингулярными операторами с кусочно-непрерывными коэффициентами. Пусть $£(\lambda,\ t,\xi)$ $(t\in\Gamma,\xi\in R)$ (см. [4]) его символ. Легко заметить (на деталях не останавливаемся), что при $p=2,\ \xi_0=0,\ t=t_1^{(1)}$ и $\lambda=2i$ имеет место равенство $det£\left(2i,\ t_1^{(1)},\xi_0\right)=0.$ Это противоречит тому, что оператор $A=\lambda I+M_1+M_2$ является нётеровым в $L_2(\Gamma)$ для всех $\lambda\neq 0$. Соответствующее значение $\lambda\neq 0$ можно подобрать в любом пространстве $L_p(\Gamma)$. Таким образом, условия $\Gamma_j\cap\Gamma\cap\tilde{\Gamma}_k=\emptyset$ $(j,k=1,..,n)$ в Теореме 3.1 существенны для нётеровости оператора (3.2).

Выводы

В работе получены некоторые достаточные условия, при которых интегральные операторы с точечными особенностями являются Ф-допустимыми возмущениями сингулярных интегральных операторов с непрерывными коэффициентами. При этом индекс сингулярного оператора инвариантен в результате соответствующих возмущений. Построенный пример нётерового оператора, для которого возмущённый оператор не является нётеровым, показывает, что налагаемые на числа α_k условия в некотором смысле являются точными. Этот вопрос будет обсуждён в других публикациях авторов.

Литература:

1. ВАСИЛЕВСКИЙ, Н.Л. Об одном классе сингулярных интегральных операторов с ядрами полярно-логарифмического типа. В: *Известия АН СССР, серия математическая,* 1976, том.40, №1, с.133-151.
2. NEAGU, V. *Operatoiri noetherieni cu aplicații*. Chișinău, 2015. 200 p.
3. МИХЛИН, С.Г. О вычислении индекса систем одномерных сингулярных уравнений. В: *ДАН СССР,* 1966, 168, №6, с.1248-1250.
4. GOHBERG, I., KRUPNIK, N. Banach algebras generated by singular integral operators. В: *Colloquia mathematica societatis Janos Bolyai 5. Hilbert space operators*. Tihany (Hungary), 1970, p.240-263.
5. КРУПНИК, Н, Ф-допустимые возмущения обобщённых операторов локального типа. В: *Известия вузов. Математика,* 1985, №3, с.29-39.

Данные авторов:
Галина ВОРНИЧЕСКУ, доктор, доцент, Тираспольский государственный университет.
E-mail: vornicescu@gmail.com
ORCID: 0000-0002-0148-5535
Василе НЯГУ, доктор хабилитат, профессор, Молдавский государственный университет.
E-mail: vasileneagu45@gmail.com
ORCID: 0000-0003-4062-2026

Prezentat la 20.05.2020