UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA
Facultatea de Matematică şi Informatică
Departamentul Matematică

Ludmila NOVAC, Ion CUCU

LOGICA PROPOZIŢIILOR ŞI TEORIA MULŢIMILOR

Note de curs

Aprobat
de Consiliul Calităţii al USM

CEP USM
Chişinău, 2020

CZU 512.5+510.22(075.8)
N 90

Recomandat de Departamentul Matematică şi de Consiliul Facultăţii de Matematică şi Informatică

Autori: ***Ludmila NOVAC,*** doctor, conf. univ.
Ion CUCU, doctor, conf. univ.

Recenzenţi: ***Olga IZBAŞ,*** doctor în ştiinţe fizico-matematice, cercetător ştiinţific superior
Andrei POŞTARU, doctor în ştiinţe fizico-matematice, conferenţiar universitar

Descrierea CIP a Camerei Naţionale a Cărţii

Novac, Ludmila.
Logica propoziţiilor şi teoria mulţimilor: Note de curs / Ludmila Novac, Ion CUCU; Universitatea de Stat din Moldova. Facultatea de Matematică şi Informatică, Dep. Matematică – Chişinău: CEP USM, 2020 – 153 p.

Bibliogr.: p. 151-153 (28 tit.). – 50 ex.
ISBN 978-9975-149-84-6.

512.5+510.22(075.8)
N 90

ISBN 978-9975-149-84-6

CUPRINS

Introducere

Noţiunea de logică are rădăcini adânci din timpurile antichităţii.

Democrit (460-370 î.H.) încerca să formuleze unele legi ale logicii, considerând că ele reflectă nu numai particularităţile gândirii, dar şi proprietăţile obiective ale lumii reale. Aristotel (384-322 î.H.) dezvoltă logica, apreciind-o ca ştiinţa despre mijloacele de fundamentare a adevărului, de diferenţiere a adevărului de fals. El considera că legătura dintre raţionamente în procesul demonstraţiei nu este arbitrară, dar este determinată de relaţiile dintre obiecte, evenimente şi de aceea trebuie să se supună unor legi, care să nu depindă de dorinţele ori dispoziţiile oamenilor. Spre deosebire de Democrit, Aristotel acordă atenţia principală deducţiei, şi anume, metodelor de deducere a consecinţelor din premise, care garantează veridicitatea concluziilor în condiţia veridicităţii premiselor.

Cu timpul, logica a suferit transformări radicale, devenind o ştiinţă matematizată, adică ceea ce se numeşte în prezent un sistem formal logico-matematic.

În procesul istoric, logica a fost considerată sub următoarele aspecte:

1) ca teorie a principiilor tuturor ştiinţelor, adică o disciplină care studiază principiile, obţinute prin ,,contemplare" directă sau aşa cum se reflectă ele nemijlocit în intelectul omenesc;

2) ca ştiinţă – disciplină, care înseamnă ordonare ierarhică de adevăruri (sau propoziţii adevărate);

3) ca sistem, în care logica se înfăţişează drept o serie de propoziţii legate coerent. Mai apoi această idee va culmina prin concepţia matematicienilor, care fac din logică un sistem formal, adică o construcţie din semne şi din formule compuse din semne, a cărei principală condiţie este necontradicţia ei.

Logica actuală este construită ca o ştiinţă deductivă axiomatică. Deoarece vom examina concepţia despre structura axiomatică a unei ştiinţe, şi anume, o serie de propoziţii ce sunt acceptate în fruntea unei ştiinţe, fără a fi definite şi fără a fi demonstrate. Alte propoziţii sunt introduse prin definiţie, utilizându-se diferite procedee de construcţie a formulelor cu ajutorul unor propoziţii (sau formule) elementare. O serie de propoziţii sunt derivate (deduse) prin procedee date de derivare (reguli de deducţie), din propoziţiile acceptate fără demonstraţie.

După Hilbert, metoda axiomatică permite să sesizăm cu adevărat esenţa gândirii ştiinţifice şi aceasta este de fapt metoda matematică.

În logica matematică (formalizată) vom considera propoziţiile în afară de orice conţinut, vide de orice substanţă. Obiectele unei asemenea logici vor fi doar nişte simple simboluri, nişte litere $A, B, C, ...$ (care primesc numai două valori: adevăr sau fals). Propoziţiile şi legăturile dintre propoziţii vor exprima relaţii între aceste simboluri şi aceste relaţii vor fi exprimate la fel simbolic.

Propoziţiile se leagă între ele, formând fraze, care sunt propoziţii mai complicate (formule). Aceste formule vor fi forme logice pure, în care conţinutul lor nu apare în niciun fel.

Utilizarea simbolurilor va permite să se transforme unele formule în altele, ceea ce va fi, în consecinţă, un calcul logic, asemănător calculului algebric.

Lucrarea dată mai conţine şi noţiuni generale şi moderne din *teoria mulţimilor*. În teoria naivă a mulţimilor, precum şi în alte teorii axiomatice ale mulţimilor, ideea de *mulţime* este considerată o noţiune primară, fapt pentru care nu se dă nicio definiţie. Vom înţelege mulţimea ca pe o colecţie de obiecte, fără a avea pretenţia că prin aceasta am dat o definiţie. Nu vom face nicio precizare în privinţa naturii obiectelor din care sunt formate mulţimile. Menţionăm următoarele exemple: mulţimea numerelor naturale (notată prin $\mathbb{N}$), mulţimea numerelor întregi ($\mathbb{Z}$), mulţimea numerelor raţionale ($\mathbb{Q}$), mulţimea numerelor reale ($\mathbb{R}$) şi mulţimea numerelor complexe ($\mathbb{C}$).

Lucrarea conţine trei capitole. În primul capitol sunt prezentate noţiuni de bază ale "Algebrei propoziţiilor", capitolul doi se referă la "Calculul propoziţiilor" şi în capitolul trei sunt abordate noţiunile de bază şi proprietăţile de bază din "Teoria mulţimilor".

Notele de curs prezente au drept scop dezvoltarea următoarelor competenţe generice şi specifice:

- cunoaşterea bazelor teoretice generale ale matematicii discrete şi logicii matematice necesare la construirea modelului matematic corespunzător problemelor practice cu caracter logic, care apar în diverse domenii;

- dezvoltarea capacităţii de studiu individual al bazelor matematicii discrete, logicii matematice şi teoriei mulţimilor;

- aplicarea metodelor de cercetare cantitative şi calitative la soluţionarea problemelor cu caracter logic şi decizional;

- formarea unor abilităţi de analiză, sinteză, evaluare şi alte acţiuni creative în abordarea şi soluţionarea diferitelor probleme;

- implementarea metodelor noi şi a concepţiilor matematice în cercetare şi realizarea unor lucrări proprii;

- abordarea în mod sistematic a diverse subiecte investiţionale din punct de vedere matematic;

- identificarea căilor şi metodelor de utilizare a rezultatelor obţinute în alte domenii;

- deţinerea capacităţilor şi deprinderilor necesare pentru a determina noi soluţii şi metode de rezolvare, precum şi a realiza proiecte de cercetare, demonstrând un grad de autonomie.

Această lucrare este adresată în primul rând studenţilor de la Facultatea de Matematică şi Informatică, precum şi celor de la Facultatea de Fizică şi Inginerie, Economie şi, în general, acelora care doresc să se familiarizeze cu noţiunile de bază ale Logicii matematice şi Teoriei mulţimilor.

1 Algebra propoziţiilor

Obiective de referinţă:

- să aplice corect operaţiile logice la construirea tabelului de valori pentru formule concrete;

- să construiască formule echivalente aplicând proprietăţile operaţiilor logice;

- să determine dacă formulele sunt identic adevărate, identic false sau realizabile;

- să construiască (prin transformări) formele normale conjunctivă şi disjunctivă perfectă pentru formule concrete;

- să aplice formele normale la rezolvarea problemei deciziei.

1.1 Noţiunea de formulă în algebra propoziţiilor. Clasificarea formulelor algebrei propoziţiilor

Vom analiza diferite propoziţii, care pot fi adevărate sau false şi nu pot fi şi adevărate, şi false în acelaşi timp. Vom face abstracţie de conţinutul propoziţiilor şi ne vom limita numai la proprietatea lor de a fi adevărate sau false. Atunci propoziţiile pot fi cercetate ca nişte mărimi sau funcţii, care pot lua numai două valori: adevăr şi fals, pe care în continuare le vom nota prin 1 şi 0. Propoziţiile le vom nota prin litere latine majuscule A, B, C,... şi le vom considera *variabile propoziţionale*. De exemplu, notăm prin A următoarea propoziţie: ,,$5 > 8$”, care este falsă, şi prin urmare $A = 0$, iar prin B vom nota propoziţia ,,7 este număr impar”, care este aldevărată şi atunci $B = 1$.

În vorbirea curentă, sunt folosite diferite legături între propoziţii, care ne permit să alcătuim noi propoziţii din cele date deja. La fel se introduc astfel de legături în algebra propoziţiilor, pe care le vom numi operaţii logice. Fie că avem două propoziţii din algebra propoziţiilor, pe care le notăm prin A şi B.

Definim operaţia binară *conjuncţia* propoziţiilor A şi B şi o notăm prin $A\&B$ ($A \wedge B$), rezultatul căreia este o propoziţie care este adevărată, atunci şi numai atunci când ambele propoziţii A şi B sunt adevărate, şi este falsă în caz contrar.

Următoarea operaţie binară o vom numi *disjuncţie* şi o vom nota prin $A \vee B$, rezultatul căreia este o propoziţie care este falsă, atunci şi numai atunci când ambele propoziţii A şi B sunt false, şi este adevărată în caz contrar.

A III-a operaţie binară este *implicaţia* şi se notează prin $A \to B$ ($A \supset B$, $A \Rightarrow B$), rezultatul căreia este o propoziţie care este falsă, atunci şi numai atunci când A este adevărată şi în acelaşi timp B este falsă, şi este adevărată în caz contrar.

Operaţia a IV-a este *negaţia* şi se notează $\overline{A}$ ($\neg A$), este operaţie unară, rezultatul căreia este o propoziţie care este adevărată, atunci când A este falsă şi invers (viceversa).

Operaţia a V-a este *echivalenţa* şi se notează $A \sim B$ ($A \leftrightarrow B$), este operaţie binară, rezultatul căreia este o propoziţie care este adevărată, atunci şi numai atunci când ambele propoziţii A şi B primesc aceleaşi valori, şi este falsă când aceste propoziţii au valori diferite.

Operaţia a VI-a este *Suma modullo 2* şi se notează $(A \oplus B)$, este operaţie binară care este opusă echivalenţei şi rezultatul ei este o propoziţie adevărată, atunci şi numai atunci când propoziţiile A şi B primesc valori diferite, şi este falsă atunci când aceste propoziţii obţin aceeaşi valoare.

Operaţia a VII-a este *Săgeata lui Pearce* şi se notează $(A \downarrow B)$, este operaţie binară opusă disjuncţei şi rezultatul ei este o propoziţie adevărată doar atunci când propoziţiile A şi B primesc valoarea ,,fals", în celelalte cazuri este falsă.

Operaţia a VIII-a este *Bara Sheffer* şi se notează $(A \mid B)$, este operaţie binară opusă conjuncţiei şi rezultatul ei este o propoziţie care este adevărată în toate cazurile, cu excepţia cazului când ambele propoziţii A şi B primesc valoarea ,,adevăr".

Definiţia 1.1.1 *Propoziţia compusă dintr-un număr arbitrar de propoziţii simple legate cu ajutorul sus-numitelor operaţii logice o vom numi formulă în algebra propoziţiilor.*

Exemple de formule: $\overline{A} \to (B \vee \overline{C})$, $(A \to B) \vee \overline{C}$, $A\&(\overline{B} \to A) \vee \overline{C}$, $(A \downarrow B) \vee (B \oplus \overline{C})$.

Remarca 1.1.1 *Expresiile de forma: $(\vee A \to \&)$, $(\neg \to \vee B \neg)$ nu sunt formule. În aceste expresii există două sau mai multe simboluri de operaţii ($\to \&$, $\neg \to \vee$), care nu sunt urmate de simboluri ce reprezintă propoziţii simple (sau compuse), de aceea nu pot fi considerate formule. Orice propoziţie simplă, la fel, poate fi considerată formulă. Operaţiile binare*

($\&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \oplus, \downarrow, |$) *se aplică între două propoziţii simple (cu sau fară negaţie) sau compuse după acelaşi principiu. Iar operaţia unară (negaţia: $\neg$ sau $-$) se aplică unei singure propoziţii simple sau unei formule compuse, care este formată din două sau mai multe propoziţii simple, legate prin operaţiile binare.*

În continuare, vom considera că fiecare formulă determină o oarecare funcţie, argumentele căreia sunt propoziţii elementare simple. Astfel de funcţii le vom numi în continuare funcţii booleene. Deoarece atât argumentele cât şi funcţiile descrise mai sus pot avea numai două valori (0, 1), atunci funcţiile date pot fi descrise complet printr-un tabel pe care îl vom numi tabelul de valori ale funcţiilor date. Prezentăm mai jos tabelul funcţiilor descrise de operaţiile logice sus-numite:

Tabelul 1.1.1. *Operaţiile logice*

A	B	$\overline{A}$	$A\&B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	$A \oplus B$	$A \downarrow B$	$A \mid B$
0	0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0	0	0

Definiţia 1.1.2 *Vom spune că formulele A şi B sunt „identic egale” (sau „echivalente”) şi vom scrie $A \equiv B$, dacă pentru orice valori ale variabilelor propoziţionale din aceste formule se constată că formulele date iau aceleaşi valori.*

De exemplu: $\overline{\overline{A}} \equiv A$, $A\&B \equiv B\&A$, $A \vee B \equiv B \vee A$, $A\&A \equiv A$, $A \vee A \equiv A$, $\overline{A\&B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$, $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A}\&\overline{B}$, $A \to B \equiv \overline{A} \vee B$, $A \sim B \equiv (A \to B)\&(B \to A)$.

Definiţia 1.1.3 *Formula se numeşte ,,identic adevărată", dacă pentru orice valori posibile ale variabilelor propoziţionale din această formulă obţinem valoarea ,,1" (,,adevăr"). Ca exemplu de formule identic adevărate ne pot servi următoarele formule:* $A \vee \overline{A}$, $A \to (B \to A)$, $[A\&(A \to B)] \to B$.

Definiţia 1.1.4 *Formula se numeşte ,,realizabilă", dacă există valoarea ,,1" (,,*adevăr*") pentru oarecare valori ale variabilelor propoziţionale din această formulă.*

De exemplu: A, $A \vee \overline{B}$, $A \to \overline{A}$.

Definiţia 1.1.5 *Formulele care iau valoare ,,0" (,,*fals*"), independent de valorile variabilelor propoziţionale din care ea este alcătuită, se numesc formule ,,nerealizabile" sau ,,identic false" (formulă falsă în orice interpretare sau ,,contradicţie").*

De exemplu: $A\&\overline{A}$, $(A \to A)\&\overline{(A \to A)}$, $A \leftrightarrow \overline{A}$.

Astfel, toate formulele din algebra propoziţiilor se împart în trei categorii: identic adevărate, identic false şi realizabile. Formulele identic adevărate se mai numesc *tautologii*. Formula identic falsă se mai numeşte *contradicţie* sau *formulă nerealizabilă, nesatisfiabilă*. Iar formulele realizabile se mai numesc *satisfiabile*.

În algebra propoziţiilor se respectă următoarele proprietăţi:
legile comutative:
1) $A \vee B \equiv B \vee A$; 2) $A\&B \equiv B\&A$;
legile asociative:
3) $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$; 4) $A\&(B\&C) \equiv (A\&B)\&C$;
legile distributive:
5) $A \vee (B\&C) \equiv (A \vee B)\&(A \vee C)$;
6) $A\&(B \vee C) \equiv (A\&B) \vee (A\&C)$;
legile lui De Morgan:
7) $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A}\&\overline{B}$; 8) $\overline{A\&B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$;
legile absorbţiei:
9) $A \vee (A\&B) \equiv A$; 10) $A\&(A \vee B) \equiv A$;
11) $A \vee (\overline{A}\&B) \equiv (A \vee B)$; 12) $A\&(\overline{A} \vee B) \equiv (A\&B)$;
legea contradicţiei: 13) $A\&\overline{A} \equiv f$;
legea terţului exclus: 14) $A \vee \overline{A} \equiv a$;
legea negaţiei duble: 15) $\overline{\overline{A}} \equiv A$;
legile de idempotenţă:
16) $A \vee A \equiv A$; 17) $A\&A \equiv A$;
18) $A \vee a \equiv a$; 19) $A\&a \equiv A$;
20) $A \vee f \equiv A$; 21) $A\&f \equiv f$;
echivalenţele elementare: $\overline{a} \equiv f$; $\overline{f} \equiv a$.

Remarca 1.1.2 *În algebra propoziţiilor, următoarele formule echivalente pot fi considerate proprietăţi:*

1) $A \to B \equiv (\neg A) \vee B$;
2) $A \to B \equiv (\neg B) \to (\neg A)$;
3) $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B)\&(B \to A)$;
5) $A \oplus B \equiv \overline{A \leftrightarrow B}$;
6) $A \downarrow B \equiv \overline{A \vee B}$;
7) $A \mid B \equiv \overline{A\&B}$;

4) $A \leftrightarrow B \equiv (\neg B) \leftrightarrow (\neg A)$; *8)* $\overline{A} \equiv A \oplus 1$.

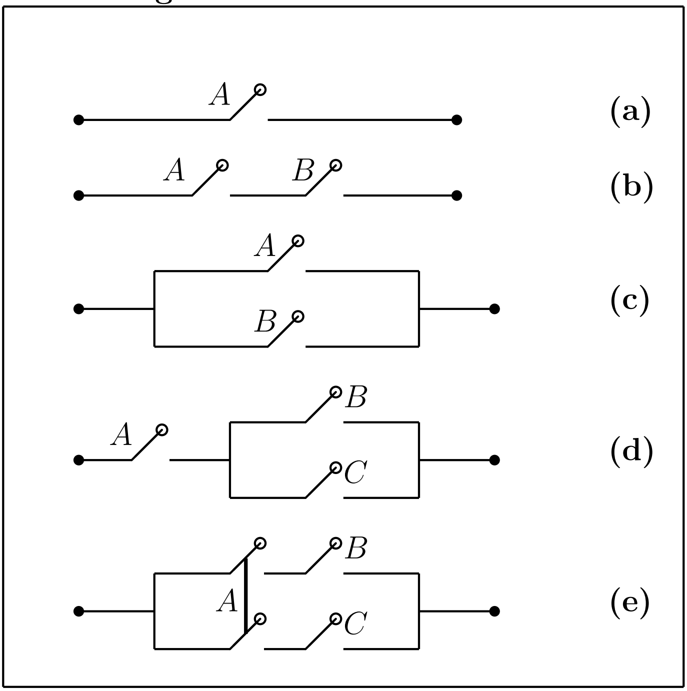
Proprietăţile 5, 6, 7 rezultă direct din definiţiile operaţiilor logice: $(\oplus, \downarrow, |)$ *formulate anterior.*

Remarca 1.1.3 *Legile comutative şi asociative au loc pentru majoritatea operaţiilor logice. Astfel, legea comutativă are loc pentru următoarele operaţii logice:* ($\&$, $\vee$, $\oplus$, $\sim$, $\downarrow$, $|$)*, excepţie în acest caz este doar operaţia ,,implicaţie" (*$\rightarrow$*). Legea asociativă are loc pentru următoarele operaţii logice:* ($\&$, $\vee$, $\oplus$, $\sim$)*, iar pentru celelalte operaţii nu are loc. În ceea ce priveşte proprietatea distributivă, nu pentru fiecare pereche de operaţii logice aceasta se realizează. În acest scop, este propus a se analiza exerciţiul 1.1.2 expus la finalul paragrafului.*

Remarca 1.1.4 *Asupra unei formule logice se pot aplica transformări logice. Prin* transformare logică *se subînţelege aplicarea proprietăţilor operaţiilor logice, astfel încât una sau mai multe operaţii logice din formulă se exprimă prin alte operaţii logice (aplicând legile şi proprietăţile formulate anterior), iar formula nou-construită după acest principiu, este echivalentă cu formula iniţială asupra căreia s-au aplicat proprietăţile respective ale operaţiilor. În cazul aplicării transformărilor echivalente, trebuie de ţinut cont de unele reguli prioritare. Dacă formula conţine paranteze, atunci se transformă mai întâi expresiile logice din paranteze, apoi cele dintre paranteze. Dacă formula nu conţine paranteze, atunci ea se poate transforma după regula: se aplică mai întâi transformări asupra* *negaţiilor (utilizând legile De Morgan), apoi conjuncţiile, disjuncţiile, implicaţiile, echivalenţele etc. (utilizând legile comutative, asociative, distributive şi alte proprietăţi).*

Exemplul 1.1.1 *(Aplicaţie): Formulele logice, în care participă doar conjuncţia şi disjuncţia, pot să reprezinte legăturile într-o schemă electrică, conform descrierii care urmează.*

Figura 1.1.1. *Schemă electrică*



Vom nota prin A propoziţia despre acel fapt că schema electrică din Fig.1.1.1(a) conduce curentul, adică întrerupătorul (notat cu aceeaşi literă A) este cuplat.

Schema obţinută prin unirea consecutivă a două întrerupătoare A şi B (Fig.1.1.1(b)) conduce curent, atunci şi numai atunci când este adevărată propoziţia $(A\&B)$, iar schema obţinută prin unirea paralelă a două întrerupătoare A şi B conduce curent, atunci şi numai atunci când este adevărată propoziţia $(A \vee B)$ (Fig.1.1.1(c)).

Pornind de la aceste operaţii simple, este uşor acum să construim o schemă, care conduce curentul, atunci şi numai atunci când este adevărată propoziţia $A\&(B \vee C)$, (prezentată în Fig.1.1.1(d)). Analogic poate fi construită şi schema electrică, care corespunde următoarei propoziţii $(A\&B) \vee (A\&C)$, (prezentată în Fig.1.1.1(e)).

Propunem în continuare câteva exemple de propoziţii compuse cu ajutorul operaţiilor logice.

Exemple elementare:

1) *Negaţia*: Propoziţia p: ,,diagonalele unui dreptunghi sunt congruente" are valoarea logică 1. Propoziţia $\neg p$: ,,diagonalele unui dreptunghi nu sunt congruente" are valoarea logică 0.
2) *Conjuncţia*: Propoziţia p: ,,3 este număr impar", are valoarea logică 1; propoziţia q: ,,raza cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei", are valoarea logică 1; propoziţia $p\&q$ are valoarea logică 1.

3) *Disjuncţia*: Propoziţia p: ,,pătratul unui număr par este multiplul lui 4", are valoarea logică 1; propoziţia q: ,,unghiurile congruente sunt drepte", are valoarea logică 0; propoziţia $p \vee q$ are valoarea logică 1.

4) *Implicaţia*: Propoziţia p: ,,înălţimile unui triunghi nu sunt concurente", are valoarea logică 0; propoziţia q: ,,pătratul unui număr impar nu este un număr impar", are valoarea logică 0. Propoziţia $p \to q$: ,,dacă înălţimile unui triunghi nu sunt concurente, atunci pătratul unui număr impar nu este un număr impar", are valoarea logică 1.

5) *Echivalenţa*: Propoziţia p: ,,medianele unui triunghi împart triunghiul în şase triunghiuri cu arii egale", are valoarea logică 1; propoziţia q: ,,trapezul cu diagonalele congruente nu este isoscel", are valoarea logică 0; propoziţia $p \leftrightarrow q$: ,,medianele unui triunghi împart triunghiul în şase triunghiuri cu arii egale dacă şi numai dacă trapezul cu diagonalele congruente nu este isoscel", are valoarea logică 0.

Disjuncţia:

1) $(a \vee b)$: ,,Accidentul s-a produs ori din cauza şoferului, ori din cauza pietonului"; 2) $(c \vee d)$: ,,Şoferul ori era obosit, ori discuta cu însoţitorul"; 3) $(e \vee f)$: ,,Persoana care a dat declaraţia era prost informată sau nesinceră"; 4) $(p \vee q)$: ,,Inculpatul va fi condamnat la trei ani închisoare sau la 20 mii lei amendă".

Conjuncţia:

1) $(x\&y)$: ,,Uşa depozitului era încuiată şi lumina (din depozit) era stinsă"; 2) $(a\&b\&c\&d)$: ,,Scopul medicinei este sănătatea, cel al construcţiei navale – corabia, cel al strategiei – victoria, cel al economiei – bunăstarea"; 3) $(a\&b)$: ,,Ploieştiul

şi Braşovul sunt municipii"; 4) $(p\&q)$: ,,Şoferul şi pasagerul din dreapta sa nu aveau centura cuplată".

Implicaţia (propoziţii condiţionale):

1) $(x \to y)$: ,,Dacă autovehiculul a parcurs distanţa dintre cele două repere în 20 sec, înseamnă că pe această porţiune a avut o viteză de peste 60 km/h"; 2) $(p \to q)$: ,,Dacă două drepte nu au puncte comune, rezultă că ele sunt paralele"; 3) $(a \to b)$: ,,Dacă şoferul a urcat la volan fără permis de conducere, înseamnă că a încălcat legislaţia".

Echivalenţa (propoziţii bicondiţionate – propoziţiile în care se enunţă o condiţie necesară şi suficientă):
1) $(p \leftrightarrow q)$: ,,Studentul X va avea media 9 dacă şi numai dacă la ultimul examen ia 10"; 2) $(x \leftrightarrow y)$: ,,Triunghiul ABC este isoscel dacă şi numai dacă are două unghiuri congruente";
3) $(a \leftrightarrow b)$: ,,Pentru ca numărul 673041 să se dividă cu 3, este necesar şi suficient ca suma cifrelor sale să se dividă cu 3";
4) $(c \leftrightarrow d)$: ,,Candidatul va fi înscris dacă şi numai dacă a depus dosarul la termen".

Exerciţiul 1.1.1 *De clasificat ca identic adevărate, identic false sau realizabile următoarele formule (adică fiind tautologii, nerealizabile sau satisfiabile):*

a) $(A \to B) \vee [B \to (A\&B)]$; b) $(A \to B) \to (B \to A)$;
c) $A \to [B \to (A\&B)]$; d) $(A \mid B) \oplus (A \mid C)$;
e) $[A \oplus (B \vee C)] \downarrow (B \to A)$;
f) $(B \sim C)\&(A \vee B) \sim (\overline{A \vee C})$;

g) $A\&(B \downarrow C) \vee [(A\&B) \downarrow (A\&C)]$;
h) $[A \mid (B \oplus C)]\&(C \to A)$;
i) $(A\&B) \to [\overline{(A\&C)} \vee B]$;
j) $(A \oplus B) \vee (A \downarrow C)$;
k) $(\overline{B \downarrow C}) \vee [(A\&B) \to A]$.

Exerciţiul 1.1.2 *Să se determine dacă au loc echivalenţele care urmează. (Dacă echivalenţele sunt adevărate, atunci ele pot fi considerate proprietăţi distributive pentru perechile respective de operaţii):*

1) $x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (x \vee z)$;
2) $x \to (y \sim z) = (x \to y) \sim (x \to z)$;
3) $x\&(y \sim z) = (x\&y) \sim (x\&z)$;
4) $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$;
5) $x \to (y\&z) = (x \to y)\&(x \to z)$;
6) $x \oplus (y \to z) = (x \oplus y) \to (x \oplus z)$;
7) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$;
8) $x \oplus (y \vee z) = (x \oplus y) \vee (x \oplus z)$;
9) $x\&(y \to z) = (x\&y) \to (x\&z)$;
10) $x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (x \vee z)$;
11) $x\&(y \downarrow z) = (x\&y) \downarrow (x\&z)$;
12) $x\&(y \mid z) = (x \oplus y) \mid (x\&z)$;
13) $x \mid (y \oplus z) = (x \mid y) \oplus (x \mid z)$;
14) $x \mid (y \downarrow z) = (x \mid y) \downarrow (x \mid z)$;
15) $x \vee (y \downarrow z) = (x \vee y) \downarrow (x \vee z)$.

1.2 Problema deciziei şi forme normale

,,Problema deciziei" în algebra propoziţiilor constă în determinarea, printr-un număr finit de acţiuni (paşi), dacă este adevărată o formulă arbitrară $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ a algebrei propoziţiilor, alcătuită din variabilele propoziţionale $x_1, x_2, ..., x_n$. Calculând pentru fiecare cortegiu de valori ale variabilelor propoziţionale valoarea formulei F, putem clasifica uşor această formulă ca identic adevărată, identic falsă sau realizabilă. Cu alte cuvinte, alcătuim tabelul de valori ale funcţiei date şi de aceea această metodă o vom numi metoda tabelară. Însă această metodă nu poate fi realizată uşor, dacă formula cercetată este alcătuită dintr-un număr mare de variabile propoziţionale. De exemplu, pentru formulele alcătuite din 10 variabile, trebuie cercetate 2^{10} cortegii de valori. De aceea, apare necesitatea de a căuta alte metode de soluţionare a problemei deciziei. Vom încerca să aplicăm la rezolvarea acestei probleme metodele algebrei propoziţiilor (diferite proprietăţi şi anumite forme ale funcţiilor).

Definiţia 1.2.1 *Conjuncţia unor variabile propoziţionale şi a negaţiilor unor variabile propoziţionale se numeşte ,,conjuncţie elementară".*

De exemplu: $x_1 \& \overline{x_2} \& x_3$, $x \& y \& \overline{z}$, $\overline{A} \& \overline{B} \& \overline{C}$, $\overline{A} \& B \& \overline{C}$.

Definiţia 1.2.2 *Disjuncţia unor variabile propoziţionale şi a negaţiilor unor variabile propoziţionale se numeşte ,,disjuncţie elementară".*

De exemplu: $x_1 \vee x_2 \vee x_3$, $x \vee \overline{y} \vee z$, $A \vee B \vee \overline{C}$, $\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}$.

Remarca 1.2.1 *Atât o variabilă propoziţională, cât şi negaţia unei variabile propoziţionale sunt considerate conjuncţie elementară şi disjuncţie elementară, deoarece:* $A \equiv A\&A \equiv$
$\equiv A \vee A, \overline{A} \equiv \overline{A}\&\overline{A} \equiv \overline{A} \vee \overline{A}$.

Teorema 1.2.1 *O conjuncţie elementară este identic falsă, dacă şi numai dacă ea conţine cel puţin o variabilă propoziţională împreună cu negaţia ei.*

Demonstraţie. Fie: conjuncţia elementară dată conţine o variabilă propoziţională X împreună cu negaţia ei $\overline{X}$, adică are următoarea formă: $X\&Y\&\overline{Z}\&\overline{X}\&...$ (variabilele $Y, Z, ...$ sunt celelalte variabile propoziţionale ale disjuncţiei date, care pot şi să lipsească).

Deoarece conjuncţia este atât comutativă, cât şi asociativă, atunci putem transforma conjuncţia dată într-o conjuncţie de forma: $(X\&\overline{X})\&Y\&\overline{Z}\&....$ Conjuncţia $X\&\overline{X}$ este identic falsă, deci şi conjuncţia elementară iniţială este la fel identic falsă.

Presupunem, conjuncţia elementară dată nu conţine nicio variabilă propoziţională împreună cu negaţia ei. În acest caz, avem posibilitatea de a atribui fiecărei variabile fără negaţie valoarea 1 ("a"), iar fiecărei variabile cu negaţie – valoarea 0 ("f"). După ce atribuim tuturor variabilelor propoziţionale din conjuncţia dată valori după regula descrisă mai sus, obţinem că fiecare termen al conjuncţiei date va avea valoarea 1 (”a”) şi, prin urmare, conjuncţia în întregime are aceeaşi valoare de adevăr (1 sau ”a”) pentru valorile atribuite variabilelor date.

De aici rezultă: conjuncţia elementară iniţială nu poate fi identic falsă, c.t.d. □

În mod analogic poate fi demonstrată şi următoarea teoremă.

Teorema 1.2.2 *O disjuncţie elementară este identic adevărată dacă şi numai dacă ea conţine cel puţin o variabilă propoziţională împreună cu negaţia ei.*

Definiţia 1.2.3 *Formula echivalentă formulei date, care reprezintă disjuncţia unor conjuncţii elementare, se numeşte forma normală disjunctivă (f.n.d.) a formulei date.*

De exemplu: $(A\&B\&\overline{C}) \vee (\overline{B}\&C) \vee (\overline{A}\&B\&\overline{C})$ este o f.n.d.

Din cele menţionate anterior, următoarele formule sunt identic egale: $A \to B \equiv \overline{A} \vee B$, $A \sim B \equiv (A \to B)\&(B \to A)$, $\overline{A\&B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$, $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A}\&\overline{B}$.

Teorema 1.2.3 *Pentru orice formulă F, există forma sa normală disjunctivă (f.n.d.).*

Demonstraţie. Reişind din legile 1)-20) şi proprietăţile operaţiilor logice, formulate în paragraful 1.1, rezultă că fiecare formulă F în algebra propoziţiilor poate fi transformată întro formulă echivalentă ei, care conţine numai operaţiile logice:

conjuncţie, disjuncţie, negaţie ($\&$, $\vee$, $\neg$), iar operaţia negaţiei se referă numai la variabile propoziţionale.

Pentru a demonstra această teoremă, vom aplica următoarea schemă algoritmică. Considerăm formula iniţială F asupra căreia vom aplica un şir de transformări echivalente, utilizând legile formulate în paragraful 1.1 şi proprietăţile care rezultă din definiţiile operaţiilor logice: 1) ,,*suma modulo 2*" este opusă ,,*echivalenţei*"; 2) ,,*Bara Sheffer*" este opusă ,,*conjuncţiei*"; 3) ,,*Săgeata lui Pearce*" este opusă ,,*disjuncţiei*". De asemenea, cunoaştem că ,,*echivalenţa*" poate fi exprimată prin ,,*implicaţie*" şi ,,*conjuncţie*", iar ,,*implicaţia*" poate fi exprimată prin ,,*negaţie*" şi ,,*disjuncţie*".
Se poate demonstra uşor că se realizează ,,*legea distributivă a conjuncţiei faţă de disjuncţie*", precum şi viceversa:

$$A\&(B \vee C) \equiv (A\&B) \vee (A\&C);$$

$$A \vee (B\&C) \equiv (A \vee B)\&(A \vee C).$$

Deschizând mai departe toate parantezele din formula nouobţinută (aplicând prima lege distributivă), vom prezenta formula iniţială sub forma unei disjuncţii de conjuncţii elementare. Anume această formă şi va reprezenta forma normală disjunctivă pentru formula iniţială F. Această schemă algoritmică poate fi formulată prin următoarele etape:

1) Dacă formula iniţială F conţine operaţia ,,suma modulo 2" ($\oplus$), atunci ea se exprimă prin echivalenţă şi negaţie. Dacă F conţine operaţia ,,Săgeata lui Pearce" ($\downarrow$), atunci ea se exprimă prin disjuncţie şi negaţie. Dacă F conţine operaţia ,,Bara Sheffer" ($|$), atunci ea se exprimă prin conjuncţie şi negaţie; **2)** Dacă formula F_1 obţinută ca rezultat al unor transformări din pasul 1), conţine operaţia echivalenţă ($\leftrightarrow$), atunci ea se exprimă prin implicaţie şi conjuncţie; **3)** Dacă formula F_2 obţiunută ca rezultat al unor transformări din pasul 1) şi 2), conţine operaţia implicaţie ($\rightarrow$), atunci ea se exprimă prin disjuncţie şi negaţie; **4)** Dacă formula F_3 obţinută ca rezultat al unor transformări din pasul 1), 2) şi 3), conţine disjuncţie cu negaţie sau conjuncţie cu negaţie, atunci se aplică *legile lui De Morgan*; **5)** În final, asupra formulei obţinute F_4 se vor aplica legile distributive şi deschizând astfel toate parantezele din formula obţinută, vom reprezenta formula iniţială printr-o disjuncţie de conjuncţii elementare. Astfel, dacă aplicăm aceste transformări oricărei formule F, în final, vom construi forma normală disjunctivă a formulei F. Ceea ce trebuia de demonstrat. $\square$

Exemplul 1.2.1 *Vom construi forma normală disjunctivă pentru formula de mai jos:*

$(X\&Y) \sim Z \equiv [(X\&Y) \rightarrow Z]\&[Z \rightarrow (X\&Y)] \equiv [(\overline{X\&Y}) \vee$
$\vee Z]\&[\overline{Z} \vee (X\&Y)] \equiv [\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z]\&[\overline{Z} \vee (X\&Y)] \equiv (\overline{X}\&\overline{Z}) \vee$
$\vee(\overline{X}\&X\&Y) \vee (\overline{Y}\&\overline{Z}) \vee (\overline{Y}\&X\&Y) \vee (Z\&\overline{Z}) \vee (Z\&X\&Y) \equiv$
$\equiv (\overline{X}\&\overline{Z}) \vee (\overline{Y}\&\overline{Z}) \vee (Z\&X\&Y)$ – *f.n.d.*

Definiţia 1.2.4 *Formula echivalentă formulei date, care reprezintă conjuncţia unor disjuncţii elementare, se numeşte forma normală conjunctivă (f.n.c.) a formulei date.*

Exemplul 1.2.2 *Prezentăm forma normală conjunctivă pentru formula:*

$$A \to (B\&C) \equiv \overline{A} \vee (B\&C) \equiv (\overline{A} \vee B)\&(\overline{A} \vee C) \text{ - } \textit{f.n.c.}$$

Prin analogie cu teorema 1.2.3 poate fi demonstrată teorema următoare:

Teorema 1.2.4 *Pentru orice formulă F există forma sa normală conjunctivă (f.n.c.).*

Exemplul 1.2.3 *Vom prezenta construirea formei normale conjunctive pentru formula $F = (x\&\overline{y}) \to (y\&\overline{z})$, cu ajutorul transformărilor echivalente în baza proprietăţilor prezentate în paragraful precedent:*
$(x\&\overline{y}) \to (y\&\overline{z}) \equiv \overline{(x\&\overline{y})} \vee (y\&\overline{z}) \equiv (\overline{x} \vee \overline{\overline{y}}) \vee (y\&\overline{z}) \equiv$
$\equiv (\overline{x} \vee y \vee y)\&(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \equiv (\overline{x} \vee y)\&(\overline{x} \vee y \vee \overline{z})$.

Formele normale pot avea o aplicabilitate particulară în scopul restabilirii unor detalii de adevăr în cazul când nu se cunoaşte adevărul integral despre o anumită situaţie.

Oferim un exemplu de aplicare a celor menţionate mai sus la rezolvarea unor probleme.

Exemplul 1.2.4 *(Aplicaţie): Alexandru, Ion şi Mihai au găsit în pământ un vas vechi. Fiecare şi-a spus părerea cu privire la el astfel:*

Alexandru: ,,Este un vas grecesc din secolul V".

Ion: ,,Este un vas chinezesc din secolul III".

Mihai: ,,Nu este un vas grecesc din secolul IV".

Profesorul de istorie le-a spus baieţilor că fiecare dintre ei are dreptate într-o anumită privinţă. Unde şi în ce secol a fost confecţionat vasul?

Rezolvare: Facem următoarele notaţii:

p_1: ,,este un vas grecesc"; p_2: ,,este din secolul V";

q_1: ,,este un vas chinezesc"; q_2: ,,este din secolul III";

$\neg p_1$: ,,nu este un vas grecesc"; r: ,,este din secolul IV".

Din afirmaţia profesorului deducem că se pot enunţa următoarele echivalenţe:

$(p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_2) \equiv a$;

$(q_1 \wedge \neg q_2) \vee (\neg q_1 \wedge q_2) \equiv a$;

$(\neg p_1 \wedge \neg r) \vee (\neg(\neg p_1) \wedge r) \equiv a$.

Răspunsul se va obţine făcând conjuncţia propoziţiilor compuse din membrul stâng şi transformând această propoziţie complexă cu ajutorul echivalenţei (utilizând proprietăţile distributive): $(a \vee b) \wedge (c \vee d) \equiv (a \wedge c) \vee (a \wedge d) \vee (b \wedge c) \vee (b \wedge d)$.

Pe parcursul transformărilor se elimină propoziiţiile compuse (conjuncţiile elementare) de forma: ,,vasul este grecesc şi chinezesc" sau ,,este din secolul III şi V" etc. În final, se ajunge la urmăroarea echivalenţă (care conţine o conjuncţie elementară): $\neg p_1 \wedge p_2 \wedge q_1 \wedge \neg q_2 \wedge \neg p_1 \wedge \neg r \equiv a$.

De aici rezultă că: ,,Vasul este chinezesc din secolul V".

Exerciţii:

1) Anişoara, Tudoriţa, Valentina şi Daniela participă la olimpiada de matematică în cadrul şcolii. Colegii şi profesorii au anticipat următoarele rezultate: 1. Tudoriţa va ocupa locul întâi, iar Valentina locul al doilea. 2. Tudoriţa va ocupa locul al doilea, iar Daniela locul al treilea. 3. Anişoara va ocupa locul al doilea, iar Daniela locul al patrulea.

După terminarea concursului, s-a constatat că în fiecare din condiţiile compuse de mai sus o afirmaţie s-a adeverit, iar cealaltă nu. Determinaţi ce loc a ocupat fiecare din cele patru participante, dacă se cunoaşte că ele au ocupat locuri diferite.

2) La alcătuirea orarului de o zi studenţii au rugat să fie respectată următoarea succesiune:

1. Logica – I sau a II-a pereche;
2. Analiza matematică – I sau a III-a pereche;
3. Geometria – a II-a sau a III-a pereche.

Să se stabilească dacă pot fi satisfăcute toate cerinţele studenţilor şi să se determine ordinea disciplinelor în corespundere cu aceste cerinţe.

3) Patru studenţi fruntaşi (Adrian, Ion, Ana şi Maria), care erau pretendenţi la bursă conform cerinţelor de a avea media semestrială nu mai mică decât cea stabilită legal, au hotărât să determine care este ordinea descrescătoare a mediilor lor. Colegii lor au presupus următoarele situaţii:

1. Ion – primul, Maria – a doua;
2. Ion – al doilea, Adrian – al treilea;
3. Ana – a doua, Adrian – al patrulea.

În final, s-a adeverit că în fiecare răspuns cel puţin o parte este adevărată. De determinat ordinea descrescătoare a mediilor lor semestriale, ţinând cont de presupunerile făcute de către colegi.

1.3 Rezolvarea problemei deciziei cu ajutorul formelor normale

După cum s-a menţionat anterior, metoda tabelară de rezolvare a problemei deciziei nu poate fi aplicată la formulele ce conţin un număr mare de variabile propoziţionale. De aceea, vom încerca să rezolvăm *problema deciziei* cu ajutorul formelor normale.

Teorema 1.3.1 *Formula F este identic adevărată, dacă şi numai dacă forma ei normală conjunctivă conţine în fiecare disjuncţie elementară cel puţin o variabilă propoziţională împreună cu negaţia ei.*

Demonstraţie. Fie că forma normală conjunctivă a formulei F conţine în fiecare disjuncţie elementară o variabilă împreună cu negaţia ei, adică spre exemplu poate avea următoarea formă:

$(X \vee Y \vee \overline{X})\&(Y \vee X \vee Z \vee \overline{X})\&(Z \vee X \vee \overline{Z} \vee Y)$.

În acest caz, potrivit teoremei 1.2.2 din paragraful precedent, fiecare disjuncţie elementară din forma normală conjunctivă a formulei F este identic adevărată. Dar deoarece conjuncţia unor formule identic adevărate este la fel o formulă identic adevărată, rezultă că formula F este identic adevărată, c.t.d. $\square$

În mod analogic, poate fi demonstrată şi teorema următoare.

Teorema 1.3.2 *Formula F este identic falsă, atunci şi numai atunci când forma ei normală disjunctivă conţine în fiecare* *disjuncţie elementară cel puţin o variabilă propoziţională împreună cu negaţia ei.*

Vom da în continuare exemple de aplicare a acestor două teoreme.

Exemplul 1.3.1 *Să se rezolve ,,problema deciziei" pentru formula:* $A \to (B \to (A\&B))$.

Pentru aceasta vom aduce formula dată la forma sa normală conjunctivă: $A \to (B \to (A\&B)) = \overline{A} \vee (\overline{B} \vee (A\&B)) =$
$= (\overline{A} \vee \overline{B}) \vee (A\&B) = (\overline{A} \vee \overline{B} \vee A)\&(\overline{A} \vee \overline{B} \vee B)$.
Prin urmare, aplicând teorema 1.3.1, obţinem că formula dată este identic adevărată.
Exemplul 1.3.2 *Să se rezolve ,,problema deciziei" pentru formula:* $\overline{(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})}$.
Vom aduce formula dată la forma sa normală disjunctivă:

$$\overline{(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})} = \overline{(\overline{A} \vee B) \to (\overline{\overline{B}} \vee \overline{A})} =$$
$$= \overline{\overline{\overline{(\overline{A} \vee B)}} \vee (B \vee \overline{A})} = \overline{\overline{(\overline{A} \vee B)}}\&\overline{(B \vee \overline{A})} =$$
$$= (\overline{A} \vee B)\&(\overline{B}\&\overline{\overline{A}}) = (\overline{A}\&\overline{B}\&A) \vee (B\&\overline{B}\&A).$$

Aplicând în continuare teorema 1.3.2, obţinem că formula dată este identic falsă.

Exerciţii:

Să se rezolve *problema deciziei* pentru următoarele formule:

a) $(A\&B) \to B$; b) $\overline{B \to (A \vee B)}$;

c) $[A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$;

d) $[(A \to B)\&\overline{B}] \to \overline{A}$; e) $(A \to B) \to (B \to B)$;
f) $A \to (B \leftrightarrow (A \vee C))$; g) $(A\&B) \leftrightarrow (B \vee C)$;
h) $(A \vee B) \to (B \leftrightarrow (C\&B))$.

1.4 Forme normale perfecte

Deseori, în diferite aplicaţii ale algebrei propoziţiilor, apare problema stabilirii (depistării) echivalenţei a două sau mai multe formule. Vom introduce noţiunea de formule echivalente, pornind de la faptul că fiecare formulă determină o corespondenţă (funcţie) între mulţimea cortegiilor de valori posibile ale tuturor variabilelor propoziţionale din care este alcătuită formula şi valorile logice $\{a, f\}$ sau $\{0, 1\}$. Este natural ca formulele care determină aceeaşi corespondenţă să fie considerate echivalente. Dacă pentru fiecare mulţime (clasă) de formule echivalente vom reuşi să determinăm o formă unică în care ar putea fi transformată (prin transformări echivalente) fiecare din formulele clasei date, atunci vom obţine o metodă efectivă de stabilire a echivalenţei a două sau mai multe formule.

Teorema 1.4.1 *În clasa formulelor alcătuite din n variabile propoziţionale există 2^{2^n} subclase de formule echivalente.*

Demonstraţie. Substituind în toate modurile posibile în locul variabilelor propoziţionale $x_1, x_2, ..., x_n$ valori logice $\{0, 1\}$, vom obţine 2^n cortegii diferite alcătuite din n valori logice (cu lungimea n). Fiecare cortegiu de valori poate obţine la corespondenţa respectivă numai două valori logice: ”a” şi ”f” (sau 1 şi 0). Deci, în total pot fi obţinute 2^{2^n} funcţii diferite, iar fiecare funcţie determină o clasă de formule echivalente, c.t.d. $\Box$

Definiţia 1.4.1 *Forma normală disjunctivă perfectă (f.n.d.p.) a formulei $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ se numeşte forma ei normală disjunctivă, care satisface următoarele condiţii:*

I) nu conţine două conjuncţii elementare identice;

II) fiecare variabilă propoziţională x_i $(i = 1, ..., n)$ se include numai o singură dată (cu negaţie sau fără negaţie) în fiecare conjuncţie elementară.

Exemplul 1.4.1 *Formula*
$(X\&Y\&Z) \vee (\overline{X}\&Y\&\overline{Z}) \vee (X\&Y\&\overline{Z})$ *reprezintă o f.n.d.p.*

Teorema 1.4.2 *Pentru orice formulă $F(x_1, x_2, ..., x_n)$, care nu este identic falsă, există o singură formă normală disjunctivă perfectă (f.n.d.p.).*

Demonstraţie. Vom demonstra la început *existenţa.* Pentru a obţine o f.n.d.p. a formulei F, obţinem în primul rând o f.n.d. a formulei F. Dacă această f.n.d. satisface condiţiile I şi II din definiţia 1.4.1 (f.n.d.p.), atunci ea este f.n.d.p. a formulei date F.

Admitem că f.n.d. obţinută nu satisface condiţia I. În acest caz, păstrăm numai una dintre conjuncţiile elementare identice, deoarece dacă notăm prin C conjuncţia elementară, atunci obţinem $C\&C\&C\&...\&C \equiv C$. În acest fel vom obţine că toate conjuncţiile elementare din f.n.d.p. sunt diferite, adică se satisface condiţia I.

Fie că f.n.d. obţinută anterior nu satisface condiţia II. În acest caz, pentru fiecare variabilă propoziţională x_i înlocuim fiecare conjuncţie elementară C, care nu conţine variabila x_i, (adică $x_i \notin C$) cu disjuncţia $(x_i\&C)\vee(\overline{x_i}\&C)$, care este echivalentă cu conjuncţia elementară C, deoarece:
$(x_i\&C) \vee (\overline{x_i}\&C) \equiv (x_i \vee \overline{x_i})\&C \equiv 1\&C \equiv C$.

Dacă în f.n.d. obţinută există conjuncţii elementare care conţin o variabilă propoziţională de mai multe ori, atunci înlăturăm conjuncţiile elementare în care se conţine variabila x_j împreună cu negaţia ei şi păstrăm variabila x_j numai o singură dată în conjuncţiile elementare care o conţin numai cu negaţie sau numai fără negaţie. Aceasta putem face, graţie următoarelor echivalenţe:
$C\&x_j\&\overline{x_j} \equiv C\&(\overline{x_j\&x_j}) \equiv C\&0 \equiv 0$; $0 \vee F \equiv F$;
$C\&x_j\&x_j\&...\&x_j \equiv C\&x_j$; $C\&\overline{x_j}\&\overline{x_j}\&...\&\overline{x_j} \equiv C\&\overline{x_j}$.

În consecinţă obţinem o f.n.d. care satisface condiţiile I şi II, adică o f.n.d.p. Dacă formula iniţială $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ este identic falsă, atunci din forma ei disjunctivă sunt înlăturate toate conjuncţiile elementare.

Rămâne să demonstrăm *unicitatea*. Pentru aceasta vom calcula numărul tuturor formelor normale disjunctive perfecte care pot fi alcătuite din variabile propoziţionale $x_1, ..., x_n$.

Din conjuncţia elementară $x_1\&x_2\&...\&x_n$ se pot obţine prin atribuirea negaţiilor diferitelor variabile încă (2^n-1) conjuncţii elementare diferite (în total 2^n). Construim o f.n.d.p. alcătuită din toate 2^n conjuncţii elementare posibile, care pot fi alcătuite din n variabile, şi anume:

$$(x_1\&x_2\&x_3\&...\&x_n) \vee (\overline{x_1}\&x_2\&x_3\&...\&x_n)\vee$$
$$\vee(x_1\&\overline{x_2}\&x_3\&...\&x_n) \vee (x_1\&x_2\&\overline{x_3}\&...\&x_n) \vee ...$$
$$\vee(x_1\&x_2\&x_3\&...\&\overline{x_n}) \vee (\overline{x_1}\&\overline{x_2}\&x_3\&...\&x_n)\vee$$
$$\vee(\overline{x_1}\&x_2\&\overline{x_3}\&...\&x_n) \vee ... \vee (\overline{x_1}\&x_2\&x_3\&...\&\overline{x_n})\vee$$
$$\vee(\overline{x_1}\&\overline{x_2}\&\overline{x_3}\&...\&x_n) \vee ... \vee (\overline{x_1}\&\overline{x_2}\&\overline{x_3}\&...\&\overline{x_n}).$$

Celelalte forme normale pot fi obţinute din forma dată, înlăturând de fiecare dată în mod arbitrar un număr oarecare de conjuncţii elementare.

În continuare, formăm un cortegiu din 2^n valori logice $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2^n})$, unde $\alpha_i \in \{0, 1\}$.

Numerotăm conjuncţiile elementare din f.n.d.p. iniţială cu numerele $1, 2, 3, ..., 2^n$.

Urmărind valorile cortegiului $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2^n})$, înlăturăm din f.n.d.p. iniţială acele conjuncţii elementare cărora după numerotarea înfăptuită le corespunde valoarea "f" (0). Astfel, fiecărui cortegiu de valori logice $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2^n})$ îi corespunde o f.n.d.p. Deci, în total obţinem $(2^{2^n} - 1)$ f.n.d.p. diferite (excluzând cortegiul $(0, ..., 0)$, căruia nu-i corespunde o f.n.d.p.).

În virtutea teoremei 1.4.1, numărul claselor de formule echivalente, excluzând clasa formulelor identic false, este egal cu $(2^{2^n}-1)$. Luând în consideraţie faptul că fiecare f.n.d.p. se conţine cel puţin într-o clasă de formule echivalente, obţinem că în fiecare clasă de formule echivalente se obţine o singură f.n.d.p. Ceea ce trebuia de demonstrat. $\square$

Exemplul 1.4.2 *Să se determine f.n.d.p. a formulei* $A \sim B$*:*
$A \sim B \equiv (A \to B)\&(B \to A) \equiv (\overline{A} \vee B)\&(\overline{B} \vee A) \equiv$
$\equiv (\overline{A}\&\overline{B}) \vee (\overline{A}\&A) \vee (B\&\overline{B}) \vee (B\&A) \equiv (\overline{A}\&\overline{B}) \vee (B\&A)$.

Definiţia 1.4.2 *Forma normală conjunctivă perfectă (f.n.c.p.) a formulei* $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ *se numeşte forma ei normală conjunctivă, care satisface următoarele două condiţii:*

I) Nu conţine două disjuncţii elementare identice;

II) Fiecare variabilă propoziţională x_i $(i = 1, ..., n)$ *se include o singură dată (cu negaţie sau fără) în fiecare disjuncţie elementară.*

Exemplul 1.4.3 *Formula*
$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)\&(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)\&(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ *reprezintă o f.n.c.p.*

În virtutea construcţiilor din teorema 1.4.2, poate fi demonstrată şi teorema următoare:

Teorema 1.4.3 *Pentru orice formulă* $F(x_1, x_2, ..., x_n)$*, care nu este identic adevărată, există o singură f.n.c.p.*

Exemplul 1.4.4 *Să se determine f.n.c.p. a formulei:*
$(A \to B) \to \overline{B}$.

$$(A \to B) \to \overline{B} \equiv \overline{(\overline{A} \vee B)} \vee \overline{B} \equiv (\overline{\overline{A}}\&\overline{B}) \vee \overline{B} \equiv$$
$$\equiv (A \vee \overline{B})\&\overline{B} \equiv (A \vee \overline{B})\&(A \vee \overline{B})\&(\overline{A} \vee \overline{B}) \equiv$$
$$\equiv (A \vee \overline{B})\&(\overline{A} \vee \overline{B}).$$

1.5 Exerciţii propuse pentru lucrul individual

Ex.1. Să se determine f.n.d.p. a formulelor:
a) $(x_1 \sim x_2) \vee \overline{(x_2 \rightarrow x_3)}$;
b) $A \rightarrow (B \sim \overline{C})$;
c) $(B \& C) \sim (C \vee \overline{A})$;
d) $[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$.

Ex.2. Să se determine f.n.c.p. a formulelor:
a) $(A \vee B) \& (B \vee \overline{C})$;
b) $(A \& [B \& \overline{C}]) \& (A \vee B \vee C)$;
c) $\overline{(A \rightarrow B) \rightarrow (\overline{B} \rightarrow \overline{A})}$;
d) $[(A \& B) \rightarrow B] \& [B \rightarrow (A \vee B)]$.

Ex.3. Să se determine f.n.d.p. şi f.n.c.p. ale formulelor:
a) $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow B)$;
b) $\overline{(A \& B) \rightarrow (A \vee B)}$;
c) $(A \& \overline{B}) \rightarrow (B \vee C)$;
d) $[(A \& B) \rightarrow \overline{C}] \vee [(C \& A) \rightarrow (\overline{C} \vee \overline{B})]$.

Ex.4. Să se determine care dintre următoarele formule sunt identic adevărate (tautologii), identic false (contradictorii), sau realizabile:
a) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow \overline{Q}) \rightarrow \overline{P})$;
b) $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow Q$;
c) $(P \& (Q \vee \overline{P})) \& ((\overline{Q} \rightarrow P) \vee Q)$;
d) $((P \& \overline{Q}) \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$;
e) $P \& (Q \& (\overline{P} \vee \overline{Q}))$;

f) $(((P \to Q) \to Q) \to Q) \to Q$;

g) $((((P \vee \overline{Q})\&(Q \vee R)) \vee \overline{R}) \vee Q$;

h) $(P\&(Q \vee R)) \to ((R \to (P \to Q)) \leftrightarrow (Q \to (R \to P)))$;

i) $(((P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow R)) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)) \leftrightarrow P$;

j) $((P \vee \neg Q) \to Q)\&(\neg P \vee Q)$;

k) $\neg((\neg R \to \neg(P \to \neg(Q \to R))) \to \neg(P \to \neg Q))$.

Glosar de abrevieri şi noţiuni utilizate în capitolul 1:

- ,,c.t.d.” – ceea ce trebuia de demonstrat;
- conjuncţie, disjuncţie, implicaţie, echivalenţă, negaţie,
- ,,suma modulo 2”, ,,săgeata lui Pearce”, ,,bara Sheffer”;
- ,,f.n.d.” – forma normală disjunctivă;
- ,,f.n.c.” – forma normală conjunctivă;
- ,,f.n.d.p.” – forma normală disjunctivă perfectă;
- ,,f.n.c.p.” – forma normală conjunctivă perfectă;
- ,,formule echivalente” – formule identic egale;
- ,,clauză” – disjuncţie elementară;
- ,,conjuncţie elementară”;
- ,,problema deciziei” – determinarea valorii formulei logice;
- ,,tautologie” – formulă identic adevărată;
- formulă ,,satisfiabilă” sau formulă ,,realizabilă”;
- ,,contradicţie” – formulă ,,nerealizabilă, nesatisfiabilă” sau formulă ,,identic falsă”.

2 Calculul propoziţiilor

Obiective de referinţă:
- să aplice corect axiomele calculului propoziţiilor şi regulile de deducţie din calculul propoziţiilor;
- să construiască corect şirul de deducţie pentru a demonstra formulele adevărate în calculul propoziţiilor;
- să construiască alte formule adevărate în calculul propoziţiilor în baza axiomelor, aplicând corect regula de substituţie, regula Modus Ponens şi alte reguli definite în calculul propoziţiilor;
- să aplice corect teoremele calculului propoziţiilor pentru deducerea formulelor adevărate în calculul propoziţiilor;
- să cunoască şi să aplice corect teorema deducţiei şi consecinţele sale în calculul propoziţiilor.

Problematica logicii a fost abordată în partea I a actualului ciclu, care poartă denumirea ,,Bazele matematicii discrete şi logicii matematice" scrisă de aceiaşi autori în 2016. În această lucrare, şi anume, în capitolul I, problemele respective au fost abordate cu implicarea matematicii şi îndeosebi a structurilor algebrice cu operaţii. Această abordare de rând cu rezultatele obţinute scoate la suprafaţă noi probleme de fundamentare a teoriei construite în baza noţiunii de propoziţie, noţiune care poate fi contradictorie în sine.

Astfel apare problema de a construi o teorie mai riguroasă, care ar fi într-un anumit sens echivalentă algebrei propoziţiilor şi ar servi drept o fundamentare pentru algebra propoziţiilor.

Rigurozitatea necesară poate fi obţinută folosind aşa-zisa metodă axiomatică. Prin urmare, *calculul propoziţiilor* reprezintă o teorie axiomatică menită fundamentării *algebrei propoziţiilor* şi dezvoltării principiilor logicii matematice.
Descrierea calculului propoziţiilor o vom efectua în trei etape:

I. Descrierea simbolurilor calculului propoziţiilor,

II. Definirea şi descrierea formulelor în calculul propoziţiilor,

III. Descrierea şi separarea formulelor adevărate în *calculul propoziţiilor*.

2.1 Descrierea simbolurilor şi definirea formulelor calculului propoziţiilor

În scopul construirii formulelor în calculul propoziţiilor, vom folosi trei categorii de simboluri:

1) Pentru notarea variabilelor propoziţionale şi formulelor, vom utiliza literele majuscule latine (posibil şi indexate) A, B, C, ..., X, Y, Z, A_5, B_7, ...

2) Pentru notarea simbolurilor conectorilor (legăturilor) logici, vom utiliza respectiv: & – conjuncţia (se mai notează: $\wedge$), $\vee$ – disjuncţia, $\rceil$ – negaţia ($\rceil A$ sau $\overline{A}$) şi $\rightarrow$ – implicaţia (sau $\supset$, $\Longrightarrow$).

3) Pentru notarea simbolurilor auxiliare, vom utiliza parantezele, care pot fi rotunde (,), pătrate [,], sau figurate {, }.

Alte categorii de simboluri în calculul propoziţiilor nu vom utiliza. În cazul implicaţiei $A \to B$ vom spune că A este *ipoteză*, iar B – *consecinţă.*

Formulele calculului propoziţiilor se formează dintr-o mulţime finită de simboluri din aceste trei categorii. Astfel de consecutivităţi din aceste simboluri pot fi cercetate în calitate de cuvinte, scrise în alfabetul ce constă din mulţimea simbolurilor sus-numite.

Nu orice cuvânt ce constă din simbolurile cercetate este formulă. Definiţia completă a formulei are un caracter recursiv: se indică formulele iniţiale, iar apoi regulile ce pot fi aplicate la construirea noilor formule.

Definiţia formulei

I. Variabilele propoziţionale notate prin literele latine majuscule sunt formule, pe care le vom numi *formule elementare.*

II. Dacă F şi G sunt formule, atunci cuvintele de tipul: $F\&G$, $F \vee G$, $F \to G$, $\rceil F, (\overline{F})$ sunt la fel formule.

III. Toate formulele calculului propoziţiilor se obţin doar în baza acestor reguli.

Exemplul 2.1.1 *Următoarea expresie (cuvânt) este formulă:* $(\rceil A\&[A \to B]) \to (A \vee \rceil B)$,
iar expresiile de forma $\&A$, $A \vee \rceil$, $A\&B \to \vee$ *nu sunt formule.*

Părţile componente ale formulelor le vom numi subformule.

Exemplul 2.1.2 *Formula* $(\rceil A\&B) \to C$ *are 6 subformule, şi anume,* A, B, C, $\rceil A$, $\rceil A\&B$ *şi* $\rceil(A\&B) \to C$.

Din mulţimea tuturor formulelor *calculului propoziţiilor*, evidenţiem iniţial o submulţime de formule, pe care le vom considera ca formule adevărate şi le vom numi *axiome.*

2.2 Axiomele calculului propoziţiilor

Următorul pas în descrierea calculului propoziţiilor este evidenţierea unei clase de formule, pe care le vom numi *formule deductibile* în calculul propoziţiilor. Definiţia formulelor deductibile are la fel un caracter recursiv, asemănător definiţiei formulelor. La început se definesc formulele deductibile iniţiale, iar apoi se indică regulile ce ne permit să obţinem din acestea noi formule deductibile. Astfel de reguli le vom numi reguli de deducţie, iar formulele iniţiale le vom numi axiome. Procesul de construire a formulelor deductibile din axiome, în baza regulilor de deducţie, îl vom numi *deducţia formulei* date din axiome.

Axiomele calculului propoziţiilor le vom împărţi în patru grupe:

I. Axiome în care se conţine numai implicaţia,

II. Axiome ce conţin numai implicaţia şi conjuncţia,

III. Axiome ce conţin numai implicaţia şi disjuncţia,

IV. Axiome ce conţin numai implicaţia şi negaţia.

Axiomele calculului propoziţiilor:

I. (1.) $A \to (B \to A)$;

(2.) $[A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$.

II. (1.) $(A\&B) \to A$; (2.) $(A\&B) \to B$;

(3.) $(A \to B) \to [(A \to C) \to (A \to (B\&C))]$.

III. (1.) $A \to (A \vee B)$; (2.) $B \to (A \vee B)$;

(3.) $(A \to C) \to [(B \to C) \to ((A \vee B) \to C)]$.

IV. (1.) $A \to \overline{\overline{A}}$, (2.) $\overline{\overline{A}} \to A$, (3.) $(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$.

Axioma 2 din grupa III o vom nota prin (III.2), iar axioma 3 din grupa II o notăm prin (II.3). În mod analogic vom folosi notaţiile respective şi pentru celelalte axiome. De exemplu, axioma (IV.3) va fi formula $(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$.

2.3 Regulile de deducţie în calculul propoziţiilor

În calculul propoziţiilor vom avea două *reguli principale* (de bază) *de deducţie*:

1) ***Regula substituţiei*** care constă în următoarele:
Fie $F(A_1, A_2, ..., A_n)$ o formulă deductibilă în calculul propoziţiilor, ce conţine formulele elementare $A_1, A_2, ..., A_n$. Substituind subformula A_1 (pretutindeni unde ea se întâlneşte) cu formula arbitrară B, obţinem $F(B, A_2, A_3, ..., A_n)$ care este la fel o formulă deductibilă.

Vom nota: $S_{A_1}^{B} F(A_1, A_2, ..., A_n) = F(B, A_2, A_3, ..., A_n)$.

Remarcăm faptul că pot fi substituite numai formulele elementare, în timp ce formula cu care se substituie este arbitrară (inclusiv nedeductibilă). În exemplul care urmează, în axioma (II.3) formula A se substituie cu formula $B \to C$.

Exemplul 2.3.1 $S_{A}^{B\to C}(II.3)(A \to B) \to [(A \to C) \to (A \to (B\&C))] =[(B \to C) \to B] \to [((B \to C) \to C) \to \to ((B \to C) \to (B\&C))]$.

2) ***Regula Modus Ponens*** (*M.P.*). Dacă formulele F

şi $(F \to G)$ sunt deductibile, atunci şi formula G este la fel deductibilă. Vom nota: $M.P.\frac{F,F\to G}{G}$ sau $M.P.(F, F \to G) : G$.

Remarcăm faptul că pentru a aplica regula M.P. este necesar să avem două formule F şi $F \to G$, care ambele să fie deductibile şi atunci rezultă că şi formula G este la fel deductibilă.

Exemplul 2.3.2 $M.P.\frac{A\to(A\vee C),[A\to(A\vee C)]\to[(A\&C)\to A]}{(A\&C)\to A}$.

În acest exemplu se consideră adevărate ambele formule care sunt scrise deasupra barei. Prima formulă $A \to (A \vee C)$ evident este adevarată, deoarece se obţine prin substituţie în axioma (III.1) în loc de formula B se substituie C. A doua formulă la fel este identic adevarată, de acest lucru ne putem convinge, construind tabelul de valori. În aceste condiţii, se permite aplicarea regulii *Modus Ponens* (*M.P.*). Aceasta presupune că în cazul în care prima formulă este parte a formulei a doua, şi anume, este amplasată la începutul formulei a doua urmată de implicaţie (se mai spune ca este ,,*ipoteza* în formula a doua"), atunci ea poate fi redusă şi formula nou-obţinută (partea finală a formulei a doua) la fel este formulă deductibilă (identic adevărată).

Astfel, indicând axiomele şi regulile de deducţie, obţinem noţiunea completă de formulă deductibilă în calculul propoziţiilor.

Aplicând regulile de deducţie la axiomele date, putem construi noi formule deductibile în calculul propoziţiilor.

Să cercetăm în continuare un exemplu concret.

Exemplul 2.3.3 *Vom arăta că formula* $(A \to B) \to (A \to A)$ *poate fi dedusă în calculul propoziţiilor. Pentru aceasta în primul pas efectuăm următoarea substituţie:*
1) $S_C^A(I.2) = [A \to (B \to A)] \to [(A \to B) \to (A \to A)]$.

Deoarece ipoteza din ultima formulă, şi anume:
$A \to (B \to A)$ coincide cu axioma (I.1), atunci putem aplica regula M.P. la această axiomă şi la formula obţinută la pasul 1), obţinând în final pasul:

2) $M.P. \frac{A \to (B \to A), [A \to (B \to A)] \to [(A \to B) \to (A \to A)]}{(A \to B) \to (A \to A)}$.

Astfel, obţinem că formula $(A \to B) \to (A \to A)$ poate fi dedusă din axioma (I.2), efectuând la primul pas substituţia respectivă, iar la pasul 2) aplicăm M.P. la axioma (I.1) şi la formula obţinută la pasul 1).

Regula Modus Tollens: *Regula de inferenţă M.T.* spune ca inferenţa $P \to Q$ spre $\overline{Q}$ implică faptul că $\overline{P}$ este validă. $M.T. \frac{P \to Q, \overline{Q}}{\overline{P}}$.

Definiţia 2.3.1 *Vom numi şir de deducţie orice şir de formule* $F_1, F_2, ..., F_n$ *care posedă următoarea proprietate: fiecare formulă* F_i $(i = \overline{1, n})$ *din acest şir sau este axiomă, sau se obţine din unele formule precedente din acest şir în baza regulii substituţiei sau M.P. Se spune că formula* F *este deductibilă în calculul propoziţiilor, dacă există un astfel de şir de deducţie* $F_1, F_2, ..., F_n$*, astfel încât* $F_n = F$*. În acest caz, vom folosi semnul deducţiei* $\vdash$ *şi vom scrie:* $\vdash F$.

Exemplul 2.3.4 *Să demonstrăm că are loc relaţia:*
$\vdash \rceil\rceil\rceil A \to \rceil A$.

Vom prezenta şirul de deducţie sub formă de paşi, indicând iniţial regulile aplicate la fiecare pas:

(1) $S_B^{\rceil\rceil A}(\mathrm{IV}.3) \vdash (A \rightarrow \rceil\rceil A) \rightarrow (\rceil\rceil\rceil A \rightarrow \rceil A)$.

(2) $M.P.(\mathrm{IV}.1), (1) \vdash \rceil\rceil\rceil A \rightarrow \rceil A$.

Remarcăm faptul că aceeaşi formulă $\rceil\rceil\rceil A \rightarrow \rceil A$ poate fi obţinută printr-un singur pas. Şi anume:

(1) $S_A^{\rceil A}(IV.2) \vdash (\rceil\rceil\rceil A \rightarrow \rceil A)$.

Legătura dintre calculul propoziţiilor şi algebra propoziţiilor este redată în teorema următoare.

Teorema 2.3.1 *O formulă este deductibilă în calculul propoziţiilor, dacă şi numai dacă ea este identic adevărată în algebra propoziţiilor.*

2.4 Teorema deducţiei în calculul propoziţiilor

În multe cazuri ne interesează nu numai deducţia din axiome, dar şi adăugând la aceste axiome o listă de formule.

Vom defini deducţia dintr-o listă dată de formule, pe care le anexăm la cele patru grupe de axiome.

Fie $\Gamma = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ o listă de formule arbitrare.

Definiţia 2.4.1 *Vom spune că formula B se deduce din lista de formule Γ, dacă există un şir de formule $B_1, B_2, ..., B_n$, încât ultima formulă din acest şir $B_n = B$, iar fiecare formulă*

B_i *din acest şir sau este axiomă, sau este din lista* Γ*, sau se obţine din formulele* B_j *şi* B_k*, unde* $k, j < i$ *în baza regulilor de deducţie (substituţie sau M.P.). În acest caz, vom scrie* $\Gamma \vdash B$*, iar şirul de formule* $B_1, B_2, ..., B_n$ *se numeşte deducţia formulei* B *din lista* Γ*.*

Pentru cazul particular $m = 0$ (adică $\Gamma = \varnothing$), vom scrie $\varnothing \vdash B$ sau simplu $\vdash B$, înţelegându-se că B se deduce numai din axiome.

De exemplu: $\{F, F \to G, G \to L\} \vdash F, F \to G, G, G \to L, L$.

Teorema 2.4.1 *În calculul propoziţiilor poate fi dedusă formula* $A \to A$*, adică* $\vdash A \to A$*.*

Demonstraţie. Vom construi deducţia formulei date pe paşi, indicând la fiecare pas regula folosită, iar în paranteze vom indica formula la care se aplică regula dată.

(1) $S_B^{A \to A}(I.2) \vdash [A \to ((A \to A) \to C)] \to [(A \to (A \to A)) \to (A \to C)]$,

(2) $S_C^A(1) \vdash [A \to ((A \to A) \to A)] \to [(A \to (A \to A)) \to (A \to A)]$,

(3) $S_B^{A \to A}(I.1) \vdash A \to ((A \to A) \to A)$,

(4) $M.P.\ (3), (2) \vdash [A \to (A \to A)] \to (A \to A)$,

(5) $S_B^A(I.1) \vdash A \to (A \to A)$,

(6) $M.P.\ (5), (4) \vdash A \to A$, c.t.d. $\square$

În unele cazuri, deducţia din axiome în baza regulilor de deducţie poate fi efectuată mai simplu, demonstrând în prealabil aşa-numita *teorema deducţiei*. Această teoremă ne permite să deducem formule în calculul propoziţiilor printr-o metodă mai simplă decât deducţia lor nemijlocită din axiome în baza regulilor de deducţie.

Teorema 2.4.2 ***Teorema deducţiei*** *(Erbran, 1930). Dacă* Γ*este o listă de formule, iar* A *şi* B *sunt aşa formule pentru care are loc relaţia* $\Gamma, A \vdash B$*, atunci vom avea* $\Gamma \vdash A \to B$*.*

Demonstraţie. Deoarece formula B poate fi dedusă din lista Γ şi formula A, atunci fie şirul deductiv pentru acest caz $B_1, B_2, ..., B_n$, unde $B_n = B$. Vom demonstra teorema folosind inducţia matematică relativ la lungimea şirului de deducţie n.

Fie $n = 1$. Atunci sunt posibile următoarele cazuri:
a) B_1 – axiomă, b) $B_1 \in \Gamma$, c) $B_1 = A$.

În cazurile a) şi b) vom avea $B_1 = B$. Aplicăm următoarea substituţie: (1) $S_{A,B}^{B_1,A}(I.1) \vdash B_1 \to (A \to B_1)$.
Dar deoarece în aceste cazuri sau B_1 este axiomă, sau $B_1 \in \Gamma$, atunci putem aplica regula M.P. la formula B_1 şi la formula de la pasul (1), obţinând astfel: $\Gamma \vdash A \to B$.

În cazul c) avem $B = B_1 = A$. Din teorema 2.4.1 avem $\vdash A \to A$. Astfel obţinem şi în acest caz $\Gamma \vdash A \to B$.

Prin urmare, primul pas al inducţiei matematice este complet demonstrat.

Presupunem că teorema este adevărată pentru cazul când şirul deducţiei are k termeni, unde $k < n$. Să demonstrăm afirmaţia teoremei pentru cazul următor, adică atunci când lungimea şirului de deducţie este $k + 1$. Fie şirul de deducţie

$B_1, B_2, ..., B_k, B_{k+1}$, unde $B_{k+1} = B$. Din ipoteza inducţiei avem $\Gamma \vdash A \to B_1$, $\Gamma \vdash A \to B_2$, ..., $\Gamma \vdash A \to B_k$. Deoarece şirul $\{B_1, B_2, ..., B_k, B_{k+1}\}$ este deducţia din lista Γ şi A a formulei B, atunci pentru formula B_{k+1} sunt posibile următoarele 5 cazuri:

a) B_{k+1} – axiomă; b) $B_{k+1} \in \Gamma$; c)$B_{k+1} = A$;

d) B_{k+1} se obţine în baza regulii substituţiei dintr-o formulă B_i, unde $i < k + 1$;

e) B_{k+1} se obţine în baza regulii M.P. din formulele B_i şi B_j, unde $i, j < k + 1$.

În primele trei cazuri a), b) şi c) demonstraţia este analogică cu primul pas al inducţiei, când $n = 1$.

În cazul d) B_{k+1} se obţine ca rezultat al substituţiei într-o oarecare formulă B_i, unde $i \leq k$, adică $B_{k+1} = S(B_i)$. Din ipoteza inducţiei avem $\Gamma \vdash A \to B_i$. Prin urmare, în baza regulii substituţiei, au loc şi următoarele relaţii:

$\Gamma \vdash A \to S(B_i)$, $\Gamma \vdash A \to B_{k+1}$.

În cazul e) B_{k+1} se obţine din formulele B_i şi B_j în baza regulii M.P., adică $B_{k+1} = M.P.(B_i, B_j)$, unde $i, j \leq k$. În acest caz, una din aceste formule, fie B_j are forma $B_i \to B_{k+1}$, adică $B_j = B_i \to B_{k+1}$. Să demonstrăm că are loc relaţia $\Gamma \vdash A \to B_{k+1}$. Demonstraţia o vom efectua prin următorii paşi:

(1) $\Gamma \vdash [A \to (B_i \to B_{k+1})]$, conform ipotezei inducţiei,

(2) $S_{B,C}^{B_i, B_{k+1}}(I.2) \vdash [A \to (B_i \to B_{k+1})] \to [(A \to B_i) \to (A \to B_{k+1})]$,

(3) M.P. (1),(2) $\Gamma \vdash (A \to B_i) \to (A \to B_{k+1})$,
(4) $\Gamma \vdash A \to B_i$, conform ipotezei inducţiei,
(5) M.P. (4),(3) $\Gamma \vdash A \to B_{k+1}$, c.t.d. $\Box$

Teorema 2.4.3 *(Teorema inversă a deducţiei). Dacă în calculul propoziţiilor formula $A \to B$ este deductibilă din lista de formule Γ (adică: $\Gamma \vdash A \to B$), atunci din lista de formule Γ şi formula A este deductibilă formula B (deci: $\Gamma, A \vdash B$).*

Demonstraţie. Demonstraţia acestei teoreme este foarte simplă. Vom considera şirul deductibil de formule $C_1, ..., C_m$ şi ($C_m = A \to B$), care reprezintă deducţia formulei $A \to B$ din lista de formule Γ. Cele m formule din şirul dat reprezintă primii m paşi de deducţie, la care vom mai adăuga următorii doi paşi:

Pasul $m + 1$: considerăm formula A deductibilă (adică adevărată, fiind ipoteza în formula $A \to B$);

Pasul $m+1$: aplicăm regula M.P. pentru formulele $A, A \to B$, atunci $\Gamma, A \vdash B$. Deci formula B poate fi dedusă din lista Γ şi formula A, c.t.d. $\Box$

2.5 Aplicaţiile teoremei deducţiei. Regulile derivate de deducţie în calculul propoziţiilor

Teorema 2.5.1 $\vdash (A \to B) \to [(B \to C) \to (A \to C)]$.

Demonstraţie. Din formulele $A \to B$, A şi $B \to C$, folosind regula M.P., putem obţine deducţia formulei C, adică $\{A \to B, B \to C, A\} \vdash C$.

Considerând lista de formule $\Gamma = \{A \to B, B \to C\}$, putem aplica teorema deducţiei şi atunci din ultima relaţie rezultă $\{A \to B, B \to C\} \vdash A \to C$.

Aplicând în continuare teorema deducţiei, mai întâi obţinem $\{A \to B\} \vdash (B \to C) \to (A \to C)$, iar apoi considerând $\Gamma = \varnothing$, obţinem definitiv $\vdash (A \to B) \to [(B \to C) \to (A \to C)]$, c.t.d. $\square$

Consecinţa 2.5.1 *Din formula obţinută în teorema 2.5.1, alăturând formulele $A \to B$ şi $B \to C$, putem aplica de două ori M.P. şi obţinem formula $A \to C$. Astfel obţinem Regula Silogismului (R.S.), care poate fi scrisă în următorul mod: $R.S. : \frac{A \to B, B \to C}{A \to C}$.*

Această regulă poate fi generalizată astfel: dacă avem un şir de formule deductibile $A \to B_1$, $B_1 \to B_2$, ...,$B_m \to C$, atunci este deductibilă şi formula $A \to C$. Astfel obţinem *Regula Silogismului Generalizată* ($R.S.G.$), care poate fi scrisă în modul următor: $R.S.G. : \frac{A \to B_1, B_1 \to B_2, \ldots, B_m \to C}{A \to C}$.

Teorema 2.5.2 $\vdash [A \to (B \to C)] \to [B \to (A \to C)]$.
Demonstraţie. Considerăm lista de formule $\{A \to (B \to C), B, A\}$, din care aplicând de două ori regula M.P., obţinem forula C. Astfel are loc relaţia $\{A \to (B \to C), B, A\} \vdash C$. Considerând lista de formule $\Gamma = \{A \to (B \to C), B\}$, putem

aplica teorema deducţiei şi obţinem $\{A \to (B \to C), B\} \vdash A \to C$.

În mod analogic, considerăm $\Gamma = \{A \to (B \to C)\}$ şi aplicăm încă o dată teorema deducţiei. Astfel ultima relaţie se transformă în următoarea: $\{A \to (B \to C)\} \vdash B \to (A \to C)$. În final, considerăm $\Gamma = \varnothing$ şi obţinem demonstraţia teoremei. $\square$

Consecinţa 2.5.2 *Dacă la formula obţinută în teorema 2.5.2 alăturăm formula $A \to (B \to C)$, atunci putem aplica regula M.P. şi obţinem o nouă regulă, care poartă denumirea de Regula Transpunerii (sau Transpoziţiei) Ipotezelor (R.T.I.), ce poate fi scrisă astfel:* $R.T.I. \frac{A \to (B \to C)}{B \to (A \to C)}$.

În formula $A \to (B \to C)$ formulele A şi B se consideră ipotezele. Ele fiind transpuse (adică schimbate cu locul), se obţine, la fel, o formulă deductibilă.

Teorema 2.5.3 $\vdash A \to [B \to (A\&B)]$.

Demonstraţie. Vom construi şirul deductibil al formulei date prin următorii paşi:
(1) $S^{B,A,B}_{A,B,C}(II.3) \vdash (B \to A) \to [(B \to B) \to (B \to (A\&B))]$,
(2) R.S.(I.1),(1) $\vdash A \to [(B \to B) \to (B \to (A\&B))]$,
(3) R.T.I. (2) $\vdash (B \to B) \to [A \to (B \to (A\&B))]$.
În paragraful 2.4 (Teorema deducţiei în Calculul Propoziţiilor) am demonstrat teorema 2.4.1, pe care o vom nota în continuare prin $T.1^* \vdash (A \to A)$.

(4) $S_A^B(T.1^*) \vdash (B \to B)$,
(5) M.P.(4),(3) $\vdash A \to [B \to (A\&B)]$, c.t.d. $\square$

Consecinţa 2.5.3 *Din această teoremă rezultă Regula Conjuncţiei Formulelor (R.C.F.), care poate fi scrisă astfel: R.C.F.* $\frac{A,B}{A\&B}$. *(Dacă două formule A şi B sunt deductibile, atunci conjuncţia lor A&B la fel este deductibilă.)*

Din axiomele (II.1) şi (II.2) rezultă şi regula inversă: *Regula Despărţirii Formulelor* (*R.D.F.*), care o vom scrie astfel: *R.D.F.* $\frac{A\&B}{A,B}$. Această regulă semnifică următorul fapt: dacă conjuncţia a două formule este deductibilă, atunci şi fiecare formulă separat, la fel este deductibilă.

Teorema 2.5.4 $\vdash [A \to (B \to C)] \to [(A\&B) \to C]$.

Demonstraţie. Luând în consideraţie ultima Regulă a Despărţirii Formulelor, aplicăm de două ori regula M.P. şi obţinem relaţia: $\{A \to (B \to C), (A\&B)\} \vdash C$ (deoarece $R.D.F.\frac{A\&B}{A,B}$.) Considerând în calitate de lista $\Gamma = \{A \to (B \to C)\}$, putem aplica teorema deducţiei şi obţinem: $\{A \to (B \to C)\} \vdash (A\&B) \to C$.

În continuare considerăm $\Gamma = \varnothing$ şi aplicăm încă o dată teorema deducţiei şi obţinem demonstraţia teoremei. $\square$

Consecinţa 2.5.4 *Dacă aplicăm la formula $A \to (B \to C)$ şi la formula obţinută în teorema 2.5.4 regula M.P., obţinem o nouă regulă Regula Conjuncţiei Ipotezelor (R.C.I.), care poate fi scrisă astfel:* $R.C.I.\frac{A\to(B\to C)}{(A\&B)\to C}$.

Pentru (R.C.F.) precizăm că în formula $A \to (B \to C)$, formulele A şi B se consideră ipotezele. Conform acestei reguli, formula nou-obţinută, în care noua ipoteză este conjuncţia celor două ipoteze $A\&B$, la fel este formulă deductibilă în calculul propoziţiilor.

Pentru a demonstra că are loc şi regula inversă, vom demonstra mai întâi următoarea teoremă.

Teorema 2.5.5 $\vdash [(A\&B) \to C] \to [A \to (B \to C)]$.

Demonstraţie. Dacă aplicăm $R.C.F. : \frac{A,B}{A\&B}$ la lista de formule $\{(A\&B) \to C, A, B\}$ şi apoi regula M.P., obţinem relaţia: $\{(A\&B) \to C, A, B\} \vdash C$.

Considerând în calitate de lista $\Gamma = \{(A\&B) \to C, A\}$ şi aplicând la ultima relaţie teorema deducţiei, obţinem: $\{(A\&B) \to C, A\} \vdash B \to C$.

În mod analogic, considerăm în calitate de lista: $\Gamma = \{(A\&B) \to C\}$ şi mai aplicăm o dată teorema deducţiei, de unde obţinem: $\{(A\&B) \to C\} \vdash A \to (B \to C)$.

În final, considerăm $\Gamma = \varnothing$ şi aplicând teorema deducţiei, obţinem demonstraţia teoremei. $\square$

Consecinţa 2.5.5 *Dacă aplicăm la formula* $(A\&B) \to C$ *şi la formula obţinută în teorema 2.5.5 regula M.P., obţinem Regula Despărţirii Ipotezelor (R.D.I.), pe care o vom scrie astfel:* $R.D.I. \frac{(A\&B)\to C}{A\to(B\to C)}$.

Regula (R.D.I.) este opusă pentru (R.C.I.), adică ipoteza compusă $A\&B$ poate fi divizată în două ipoteze simple A şi B, iar în consecinţă obţinem la fel o formulă deductibilă.

Consecinţa 2.5.6 *Dacă aplicăm la formula* $(A \to B)$ *şi la axioma (IV.3) regula M.P., obţinem Regula Inversării (de Inversie) (R.I.), pe care o putem scrie astfel: R.I.*$\frac{A \to B}{\overline{B} \to \overline{A}}$.

Regula Inversării spune că ipoteza şi consecinţa din formula deductibilă $(A \to B)$ pot fi schimbate cu locul, astfel se obţine o nouă formulă deductibilă (cu condiţia că se adaugă negaţie la fiecare dintre ele).

2.6 Formule echivalente. Teorema echivalenţei

Expresia de forma $(A \to B)\&(B \to A)$ o vom nota $A \sim B$. Simbolul echivalenţei nu este simbol al calculului propoziţiilor, dar se utilizează numai pentru prescurtarea formulei date.

Exemplul 2.6.1 *Să demonstrăm că în calculul propoziţiilor are loc relaţia:* $\vdash A \sim \overline{\overline{A}}$.

Într-adevăr, în virtutea axiomelor (IV.1) şi (IV.2), obţinem relaţiile $\vdash A \to \overline{\overline{A}}$ şi $\vdash \overline{\overline{A}} \to A$. Aplicând la aceste relaţii (R.C.F.) $\frac{(A,B)}{A\&B}$, obţinem: $\vdash (A \to \overline{\overline{A}})\&(\overline{\overline{A}} \to A)$, adică $\vdash A \sim \overline{\overline{A}}$, c.t.d. □

Definiţia 2.6.1 *Vom spune că formulele* A *şi* B *sunt echivalente în calculul propoziţiilor, dacă în calculul dat poate fi dedusă formula* $A \sim B$*, adică are loc relaţia* $\vdash A \sim B$.

Remarca 2.6.1 *Orice două formule care pot fi deduse în calculul propoziţiilor sunt echivalente între ele.*

Într-adevăr, fie $\vdash A$ şi $\vdash B$. În acest caz, putem afirma că au loc relaţiile $B \vdash A$ şi $A \vdash B$. Aplicând teorema deducţiei şi considerând $\Gamma = \varnothing$, din ultimele relaţii vom avea $\vdash B \to A$ şi $\vdash A \to B$. Aplicăm la ultimele formule deductibile R.C.F. şi obţinem: $\vdash (A \to B)\&(B \to A) = A \sim B$, c.t.d. $\square$

Exemplul 2.6.2 *Să demonstrăm că în calculul propoziţiilor poate fi dedusă formula $(A\&B) \sim (B\&A)$. Vom demonstra la început că au loc relaţiile:*

(*) $\vdash (A\&B) \to (B\&A)$,

(**) $\vdash (B\&A) \to (A\&B)$.

Apoi la aceste relaţii vom aplica R.C.F. şi vom obţine echivalenţa necesară. Demonstraţia o vom efectua prin următorii paşi:

(1) $S_A^{A\&B}(II.3) \vdash [(A\&B) \to B)] \to [((A\&B) \to C) \to ((A\&B) \to (B\&C))]$,

(2) M.P.(II.2),(1) $\vdash [(A\&B) \to C] \to [(A\&B) \to (B\&C)]$,

(3) $S_C^A(2) \vdash [(A\&B) \to A] \to [(A\&B) \to (B\&A)]$,

(4) M.P.(II.1),(3) $\vdash [(A\&B) \to (B\&A)]$,

(5) $S_{A,B}^{B,A}(4) \vdash [(B\&A) \to (A\&B)]$,

(6) R.C.F. (4),(5) $\vdash [(A\&B) \to (B\&A)]\&[(B\&A) \to (A\&B)] = [(A\&B) \sim (B\&A)]$.

La fel, se poate de arătat că în calculul propoziţiilor are loc relaţia $\vdash [(A \vee B) \sim (B \vee A)]$ (demonstraţia se propune cititorului).

Teorema 2.6.1 ***(Teorema echivalenţei)***. *Fie C o subformulă a formulei U, adică $U(C)$ şi fie $B_1 \sim B_2$. Atunci formulele $U(B_1)$ şi $U(B_2)$ ce se obţin din formula U prin înlocuirea (substituirea) apariţiilor subformulei C cu formulele B_1 şi B_2 sunt de asemenea echivalente. Cu alte cuvinte, are lor următoarea relaţie:*

$$\vdash (B_1 \sim B_2) \to [U(B_1) \sim U(B_2)] \tag{2.6.1}$$

Demonstraţie. Vom demonstra prin inducţie matematică, relativ la numărul de operaţii din formula $U(C)$.
Fie că numărul acestor operaţii este nul. În acest caz, formula dată este însăşi subformula C, sau o altă propoziţie variabilă B, care este diferită de formula C.

În primul caz, formula (2.6.1) din teoremă se va transforma în $(B_1 \sim B_2) \to (B_1 \sim B_2)$, care poate fi obţinută din formula $A \to A$ cu ajutorul substituţiei. În cazul doi, formula se va transforma în $(B_1 \sim B_2) \to (U \sim U)$, care poate fi dedusă în virtutea următorilor paşi:
(1) $S_{A,\ \ B}^{U\sim U,\ B_1\sim B_2}(I.1) \vdash (U \sim U) \to [(B_1 \sim B_2) \to (U \sim U)]$,
(2) M.P. $(U \sim U), (1) \vdash (B_1 \sim B_2) \to (U \sim U)$.

Remarcăm faptul că formula $(U \sim U)$ poate fi dedusă din cunoscuta formulă: $(T.1^*)$ $A \to A$, în baza regulilor substituţiei şi R.C.F.

În continuarea inducţiei, fie că afirmaţia (2.6.1) este satisfăcută pentru toate formulele, care conţin nu mai mult decât n operaţii şi fie că formula $U(C)$ conţine $n+1$ operaţii (pasul inductiv). Ultima operaţie (cu numărul $n+1$) din această formulă este una din următoarele patru operaţii posibile: $\&, \vee, \rceil$,

$\rightarrow$. Aşadar, formula $U(C)$ are una din următoarele forme: $U_1(C)\&U_2(C)$, $U_1(C)\vee U_2(C)$, $U_1(C)\rightarrow U_2(C)$, $\rceil U_1(C)$, unde formulele $U_1(C)$ şi $U_2(C)$ conţin nu mai mult decât n operaţii. De aceea, pentru aceste formule sunt adevărate relaţiile (din presupunerea inducţiei):

$\vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow [U_1(B_1) \sim U_1(B_2)]$, (a)

$\vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow [U_2(B_1) \sim U_2(B_2)]$. (b)

Astfel, teorema va fi demonstrată, dacă în virtutea afirmaţiilor (a) şi (b) vom demonstra următoarele afirmaţii:

A1) $\vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow [(U_1(B_1)\&U_2(B_1)) \sim (U_1(B_2)\&U_2(B_2))]$,

A2) $\vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow [(U_1(B_1)\vee U_2(B_1)) \sim (U_1(B_2)\vee U_2(B_2))]$,

A3) $\vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow [(U_1(B_1) \rightarrow U_2(B_1)) \sim (U_1(B_2) \rightarrow U_2(B_2))]$,

A4) $\vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow [\overline{U_1(B_1)} \sim \overline{U_1(B_2)}]$.

Să demonstrăm afirmaţia (A1) cu ajutorul următorilor paşi:

(1) $S^{U_1(B_1),\ U_2(B_1)}_{A,\ \ \ B}(II.1) \vdash (U_1(B_1)\&U_2(B_1)) \rightarrow U_1(B_1)$.

Afirmaţia (a) poate fi scrisă în următoarea formă:

(2) $\vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow [(U_1(B_1) \rightarrow U_1(B_2))\&(U_1(B_2) \rightarrow U_1(B_1))]$,

(3) $S^{U_1(B_1)\rightarrow U_1(B_2),\ U_1(B_2)\rightarrow U_1(B_1)}_{A,\ \ \ B}(II.1) \vdash$

$\vdash [(U_1(B_1) \rightarrow U_1(B_2))\&(U_1(B_2) \rightarrow U_1(B_1))] \rightarrow$

$\rightarrow (U_1(B_1) \rightarrow U_1(B_2))$,

(4) R.S. (2),(3) $\vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow [(U_1(B_1) \rightarrow U_1(B_2))$,

(5) R.T.I.(4) $\vdash U_1(B_1) \rightarrow [(B_1 \sim B_2) \rightarrow U_1(B_2)]$,

(6) R.S.(1),(5) $\vdash (U_1(B_1)\&U_2(B_1)) \rightarrow [(B_1 \sim B_2) \rightarrow U_1(B_2)]$,

(7) R.T.I.(6) $\vdash (B_1 \sim B_2) \rightarrow [(U_1(B_1)\&U_2(B_1)) \rightarrow U_1(B_2)]$.

În mod analogic, se obţine şi următorul pas:

(8) $\vdash (B_1 \sim B_2) \to [(U_1(B_1)\&U_2(B_1)) \to U_2(B_2)]$.
Efectuând substituţie în axioma (II.3) şi aplicând de două ori regula M.P., în virtutea paşilor (7) şi (8), obţinem următorul pas: (9) $\vdash (B_1 \sim B_2) \to$
$\{[(U_1(B_1)\&U_2(B_1)) \to U_1(B_2)]\&[(U_1(B_1)\&U_2(B_1)) \to U_2(B_2)]\}$.

Pe de altă parte, aplicând la axioma (II.3) R.C.I. şi efectuând substituţiile respective, obţinem:
(10) $\vdash \{[(U_1(B_1)\&U_2(B_1)) \to U_1(B_2)]\&[(U_1(B_1)\&U_2(B_1)) \to U_2(B_2)]\} \to [(U_1(B_1)\&U_2(B_1)) \to (U_1(B_2)\&U_2(B_2))]$.
(11) R.S.(9),(10) $\vdash (B_1 \sim B_2) \to$
$\to [(U_1(B_1)\&U_2(B_1)) \to (U_1(B_2)\&U_2(B_2))]$.

Folosim definiţia echivalenţei şi analogic obţinem:
(12) $\vdash (B_1 \sim B_2) \to [(U_1(B_2)\&U_2(B_2)) \to (U_1(B_1)\&U_2(B_2))]$.
Efectuând substituţiile respective în axioma (II.3) şi apoi aplicând R.C.I., precum şi regula M.P., în final obţinem:
$\vdash (B_1 \sim B_2) \to [(U_1(B_1)\&U_2(B_1)) \sim (U_1(B_2)\&U_2(B_2))]$.

Astfel, afirmaţia (A1) este demonstrată. În mod analogic pot fi demonstrate afirmaţiile (A2) şi (A3).

Să demonstrăm în continuare afirmaţia (A4) cu ajutorul următorilor paşi:
(1) $S_{A,\ B}^{U_1(B_1),\ U_1(B_2)}(IV.3) \vdash (U_1(B_1) \to U_1(B_2)) \to (\overline{U_1(B_2)} \to \overline{U_1(B_1)})$,
(2) $S_{A,\ B}^{U_1(B_2),\ U_1(B_1)}(IV.3) \vdash (U_1(B_2) \to U_1(B_1)) \to (\overline{U_1(B_1)} \to \overline{U_1(B_2)})$,
(3) $S_{A,\ B}^{U_1(B_1)\to U_1(B_2),\ U_1(B_2)\to U_1(B_1)}(II.1) \vdash$
$\vdash [(U_1(B_1) \to U_1(B_2))\&(U_1(B_2) \to U_1(B_1))] \to [U_1(B_1) \to$

$U_1(B_2)] =$
$= [U_1(B_1) \sim U_1(B_2)] \to [U_1(B_1) \to U_1(B_2)]$.
(Amintim că $(F \to G)\&(G \to F) = F \sim G$).
(4) R.S. (a),(3) $\vdash (B_1 \sim B_2) \to [U_1(B_1) \to U_1(B_2)]$.
(5) $S_{A,\ \ B}^{U_1(B_1) \to U_1(B_2),\ \ U_1(B_2) \to U_1(B_1)}$(II.2) $\vdash [U_1(B_1) \sim U_1(B_2)] \to [U_1(B_2) \to U_1(B_1)]$,
(6) R.S.(a),(5) $\vdash (B_1 \sim B_2) \to [U_1(B_2) \to U_1(B_1)]$.
(7) R.S.(4),(1) $\vdash (B_1 \sim B_2) \to [\overline{U_1(B_2)} \to \overline{U_1(B_1)}]$.
(8) R.S.(6),(2) $\vdash (B_1 \sim B_2) \to [\overline{U_1(B_1)} \to \overline{U_1(B_2)}]$.
(9) $S_{A,\ \ B,\ \ C}^{(B_1 \sim B_2),\ \ (\overline{U_1(B_2)} \to \overline{U_1(B_1)}),\ \ (\overline{U_1(B_1)} \to \overline{U_1(B_2)})}$(II.3) $\vdash$
$\vdash [(B_1 \sim B_2) \to (\overline{U_1(B_2)} \to \overline{U_1(B_1)})] \to$
$\to \{[(B_1 \sim B_2) \to (\overline{U_1(B_1)} \to \overline{U_1(B_2)})] \to [(B_1 \sim B_2) \to (\overline{U_1(B_1)} \sim \overline{U_1(B_2)})]\}$.
(10) M.P. (7),(9) $\vdash [(B_1 \sim B_2) \to (\overline{U_1(B_1)} \to \overline{U_1(B_2)})] \to.$
$\to [(B_1 \sim B_2) \to (\overline{U_1(B_1)} \sim \overline{U_1(B_2)})]$.
(11) M.P. (8),(10) $\vdash (B_1 \sim B_2) \to [\overline{U_1(B_1)} \sim \overline{U_1(B_2)}]$.

Afirmaţia (A4) este demonstrată şi astfel este finalizată demonstraţia teoremei echivalenţei. $\square$

2.7 Teoremele referitoare la formule deductibile

Vom utiliza în continuare simbolul A_a pentru notarea unei formule arbitrare deductibile, adică $\vdash A_a$, iar prin A_f vom nota o formulă pentru care $\vdash \rceil A_f$. Cu alte cuvinte, dacă vom întâlni simbolul A_a (sau A_f), atunci vom considera că A_a (sau $\rceil A_f$)

este o formulă arbitrară deductibilă în calculul propoziţiilor.

Teorema 2.7.1 $\vdash B \to A_a$.

Demonstraţie.

(1) $S_A^{A_a}(I.1) \vdash (A_a \to (B \to A_a)$,

(2) M.P. $(A_a), (1) \vdash (B \to A_a)$, c.t.d. □

Teorema 2.7.2 $\vdash A_f \to A$.

Demonstraţie. (1) $S_B^{A_a}(IV.3) \vdash ((A \to A_a) \to (\overline{A_a} \to \overline{A})$,

(2) S_B^A (în Teorema 2.7.1) $\vdash (A \to A_a)$,

(3) M.P. (2),(1) $\vdash (A_f \to \overline{A})$, (Amintim că $\overline{A_a} = A_f$).

(4) $S_A^{\overline{A}}(3) \vdash A_f \to \overline{\overline{A}}$,

(5) R.S. (4),(IV.2) $\vdash A_f \to A$, c.t.d. □

Teorema 2.7.3 $\vdash A\&\overline{A} \to A_f$.

Demonstraţie.

(1) $S_B^{A_a}(I.1) \vdash A \to (A_a \to A)$,

(2) $S_{A,B}^{A_a,A}(IV.3) \vdash (A_a \to A) \to (\overline{A} \to A_f)$,

(deoarece $\overline{A_a} = A_f$),

(3) R.S. (1),(2) $\vdash A \to (\overline{A} \to A_f)$,

(4) R.C.I.(3) $\vdash (A\&\overline{A}) \to A_f$, c.t.d. □

Teorema 2.7.4 $\vdash (A \sim A_a) \sim A$.

Demonstraţie. În virtutea definiţiei echivalenţei, este necesar să demonstrăm relaţia:

$\vdash [(A \sim A_a) \to A]\&[A \to (A \sim A_a)]$.

Însă pentru aceasta, aplicând R.C.F., este suficient să demonstrăm următoarele afirmaţii:

(a) $\vdash (A \sim A_a) \to A$.

(b) $\vdash A \to (A \sim A_a)$.

Să demonstrăm în primul rând (a). Din definiţia formulelor deductibile dintr-o listă avem $A_a \to A \vdash A$.

Aplicăm teorema deducţiei, considerând $\Gamma = \varnothing$ şi obţinem:

$$(A_a \to A) \to A. \tag{2.7.1}$$

Aplicând o substituţie în axioma (II.2), vom obţine:

$S_{A,\ \ B}^{(A\to A_a),\ (A_a\to A)}(II.2) \vdash [(A \to A_a)\&(A_a \to A)] \to (A_a \to A)$, pe care o putem scrie:

$$\vdash (A \sim A_a) \to (A_a \to A). \tag{2.7.2}$$

Aplicând R.S. formulelor (2.7.2) şi (2.7.1), obţinem (a) $\vdash (A \sim A_a) \to A$.

Să demonstrăm în continuare (b) prin următorii paşi:

(1) $\vdash A_a$

(2) $A \vdash A_a$. Aplicăm teorema deducţiei (T.D.)

(3) T.D.(2) $\vdash A \to A_a$,

(4) $A \vdash A \to A_a$,

(5) T.D.(4) $\vdash A \to (A \to A_a)$,

(6) $S_B^{A_a}(I.1) \vdash A \to (A_a \to A)$,

(7) $S_{B,\ \ C}^{A\to A_a,\ A_a\to A}(II.3) \vdash$

$\vdash [A \to (A \to A_a)] \to \{[A \to (A_a \to A)] \to [A \to ((A \to A_a)\&(A_a \to A))]\}$,

(8) M.P. (5),(7) $\vdash [A \to (A_a \to A)] \to [A \to ((A \to A_a)\&(A_a \to A))]$,

(9) M.P. (6),(8) $\vdash A \to (A \sim A_a)$, c.t.d. $\square$

Teorema 2.7.5 $\vdash (A \sim A_f) \sim \overline{A}$.

Demonstraţie. În mod analogic cu teorema precedentă este suficient să demonstrăm relaţiile:
(a) $\vdash (A \sim A_f) \to \overline{A}$.
(b) $\vdash \overline{A} \to (A \sim A_f)$.

Să demonstrăm relaţia (a) prin următorii paşi:
(1) $S_B^{A_f}(IV.3) \vdash (A \to A_f) \to (\overline{A_f} \to \overline{A}) = (A \to A_f) \to (A_a \to \overline{A})$.

În formula (2.7.1) din teorema 2.7.4 substituim A cu $\overline{A}$:
(2) $S_A^{\overline{A}}(2.7.1) \vdash (A_a \to \overline{A}) \to \overline{A}$,
(3) R.S.(1),(2) $\vdash (A \to A_f) \to \overline{A}$,
(4) $S_{A,\ \ B}^{A \to A_f,\ A_f \to A}(II.1) \vdash [(A \to A_f)\&(A_f \to A)] \to$
$\to (A \to A_f)$,
(5) R.S.(4),(3) $\vdash [(A \to A_f)\&(A_f \to A)] \to \overline{A} =$
$= (A \sim A_f) \to \overline{A}$, c.t.d.

Să demonstrăm în continuare (b) prin următorii paşi:
(1) $S_{A,B}^{\overline{A},A_a}(I.1) \vdash \overline{A} \to (A_a \to \overline{A})$,
(2) $S_{A,B}^{A_a,\overline{A}}(IV.3) \vdash (A_a \to \overline{A}) \to (\overline{\overline{A}} \to \overline{A_a})$.
Dar deoarece $\overline{\overline{A}} \sim A$, iar $\overline{A_a} \sim A_f$, în virtutea teoremei echivalenţei, obţinem:
(3) $\vdash (A_a \to \overline{A}) \to (A \to A_f)$.
(4) R.S.(1),(3) $\vdash \overline{A} \to (A \to A_f)$.
(5) Aplicăm teorema 2.7.2 $\vdash A_f \to A$.
(6) $\overline{A} \vdash A_f \to A$ (din definiţia formulelor deductibile)
(7) T.D.(6)$\vdash \overline{A} \to (A_f \to A)$,
(8) $S_{A,\ B,\ C}^{\overline{A},\ A \to A_f,\ A_f \to A,}(II.3) \vdash \left[\overline{A} \to (A \to A_f)\right] \to$
$\to \left\{\left[\overline{A} \to (A_f \to A)\right] \to \left[\overline{A} \to ((A \to A_f)\,\&\,(A_f \to A))\right]\right\}$,

(9) M.P.(4),(8) $\vdash \left[\overline{A} \to (A_f \to A)\right] \to$
$\to \left[\overline{A} \to ((A \to A_f)\,\&\,(A_f \to A))\right]$,
(10) M.P.(7),(9) $\vdash \left[\overline{A} \to ((A \to A_f)\,\&\,(A_f \to A))\right] = \overline{A} \to (A \sim A_f)$.

Amintim că anterior a fost demonstrată teorema 2.5.3 (din secţiunea 2.5):

$\vdash A \to [B \to (A\&B)]$ (*)

(11) $S_{A,\quad B}^{(A\sim A_f)\to\overline{A},\ \overline{A}\to(A\sim A_f)}(*) \vdash [(A \sim A_f) \to \overline{A}] \to \{[\overline{A} \to (A \sim A_f)] \to [((A \sim A_f) \to \overline{A})\&(\overline{A} \to (A \sim A_f))]\}$.
(12) M.P. (a),(11) $\vdash [\overline{A} \to (A \sim A_f)] \to [((A \sim A_f) \to \overline{A})\&(\overline{A} \to (A \sim A_f))]$.
(13) M.P. (10),(12) $\vdash [((A \sim A_f) \to \overline{A})\&(\overline{A} \to (A \sim A_f))] =$
$= (A \sim A_f) \sim \overline{A}$, c.t.d. $\square$

Teorema 2.7.6 *În calculul propoziţiilor are loc Legea terţului exclus:* $\vdash (A \vee \overline{A})$.

Demonstraţia se va face prin următorii paşi:
(1) $S_B^{\overline{A}}(III.1) \vdash A \to (A \vee \overline{A})$,
(2) $S_B^{\overline{A}}(III.2) \vdash \overline{A} \to (A \vee \overline{A})$,
(3) R.I.(1) $\vdash (\overline{A \vee \overline{A}}) \to \overline{A}$,
(4) R.I.(2) $\vdash \overline{A \vee \overline{A}} \to \overline{\overline{A}}$,
(5) $S_{A,\quad B,C}^{\overline{A\vee\overline{A}},\ \overline{\overline{A}},\overline{A}}(II.3) \vdash [\overline{A \vee \overline{A}} \to \overline{\overline{A}}] \to$
$\to \left\{[\overline{A \vee \overline{A}} \to \overline{A}] \to \left[\left(\overline{A \vee \overline{A}}\right) \to \left(\overline{\overline{A}}\&\overline{A}\right)\right]\right\}$,
(6) M.P. (4),(5) $\vdash [\overline{A \vee \overline{A}} \to \overline{A}] \to \left[\left(\overline{A \vee \overline{A}}\right) \to \left(\overline{\overline{A}}\&\overline{A}\right)\right]$,
(7) M.P. (3),(6) $\vdash \left(\overline{A \vee \overline{A}}\right) \to \left(\overline{\overline{A}}\&\overline{A}\right)$,
(8) Teoerema echicalenţei (T.E.)(7) $\left(\overline{\overline{A}} \sim A\right) \vdash \left(\overline{A \vee \overline{A}}\right) \to$

$\left(A\&\overline{A}\right)$.
Amintim că anterior am demonstrat teorema 2.7.3 (din secţiunea 2.7): $\left(A\&\overline{A}\right) \to A_f$ (**)
(9)RS(8),(**) $\vdash \left(\overline{A \vee \overline{\overline{A}}}\right) \to A_f$,
(10) RI (9) $\vdash \overline{A_f} \to \overline{\left(\overline{A \vee \overline{\overline{A}}}\right)}$,
(11) T.E. $\left(\overline{A_f} \sim A_a\right), \left(\overline{\overline{F}} \sim F\right)$ (10) $\vdash A_a \to \left(A \vee \overline{A}\right)$,
(12) M.P. (A_a),(11) $\vdash A \vee \overline{A}$, c.t.d. $\square$

Teorema 2.7.7 $\vdash (A \sim A_a) \vee (A \sim A_f)$.

Demonstraţia rezultă din teorema 2.7.6 în virtutea teoremelor 2.7.4 şi 2.7.5.

2.8 Necontradicţia calculului propoziţiilor

Una din problemele principale la analiza oricărui calcul este problema necontradicţiei calculului dat. Vom da în continuare definiţia calculului necontradictoriu, care se referă nu numai la calculul propoziţiilor, dar şi la alte calcule cercetate în logica matematică.

Definiţia 2.8.1 *Calculul logic se numeşte necontradictoriu, dacă în el nu pot fi deduse aşa două formule, astfel încât una dintre ele să fie negaţia celeilalte formule.*

Esenţa problemei necontradicţiei constă în faptul dacă calculul cercetat este necontradictoriu sau nu.

Definiţia 2.8.2 *Calculul logic în care poate fi dedusă atât formula A, cât şi negaţia ei $\rceil A$ se numeşte contradictoriu.*

Astfel de calcule nu prezintă niciun interes, deoarece în aceste calcule sunt deductibile absolut toate formulele şi de aceea în ele nu poate fi deosebit adevărul de fals.

Dacă, de exemplu, în calculul propoziţiilor ar putea fi deduse formulele U şi $\rceil U$, atunci în virtutea teoremelor demonstrate anterior avem:

$$(*) \vdash (U \& \rceil U) \rightarrow A_f.$$

$$(**) \vdash A_f \rightarrow A.$$

Aplicăm R.S. la formulele (*) şi (**) şi obţinem:
$\vdash (U \& \rceil U) \rightarrow A$. Dar deoarece atât U cât şi $\rceil U$ sunt deductibile, aplicăm R.C.F.$\frac{F,G}{F\&G}$ şi obţinem $\vdash U \& \rceil U$. Aplicăm în continuare M.P. şi obţinem $\vdash A$. Însă, A fiind o formulă elementară, poate fi substituită cu orice formulă, obţinând că în calculul propoziţiilor poate fi dedusă orice formulă (inclusiv una falsă).

Teorema 2.8.1 *(**Teorema despre necontradicţia calculului propoziţiilor**.) Calculul propoziţiilor este necontradictoriu.*

Demonstraţie. După cum s-a menţionat mai sus, orice formulă din calculul propoziţiilor poate fi interpretată ca formulă în algebra propoziţiilor. Vom arăta că toate formulele deductibile în calculul propoziţiilor cercetate ca formule în algebra propoziţiilor sunt identic adevărate, adică primesc valoarea adevăr pentru orice valori posibile ale variabilelor din formula dată. Prin tabela de valori a formulei date, uşor se poate de arătat că axiomele calculului propoziţiilor sunt formule identic adevărate. La fel, este clar că dacă $F(A)$ este identic adevărată, atunci şi formula $F(B)$, care se obţine ca rezultat al regulii substituţiei, este la fel identic adevărată. Observăm că regula M.P., la fel, nu ne scoate în afara formulelor identic adevărate. Într-adevăr, fie formulele A şi $A \to B$ identic adevărate, iar formula B nu este identic adevărată. În acest caz, obţinem că şi formula $A \to B$ nu este identic adevărată, ceea ce nu poate fi prin ipoteză. Deci, aplicând regula M.P. la formule identic adevărate, obţinem la fel o formulă identic adevărată. Aşadar, am demonstrat că toate formulele care pot fi deduse în calculul propoziţiilor sunt identic adevărate în algebra propoziţiilor. Prin urmare, dacă $\vdash A$, atunci A este identic adevărată, iar $\rceil A$ este identic falsă şi deci nu poate fi dedusă în calculul propoziţiilor, c.t.d. $\square$

2.9 Completitudinea calculului propoziţiilor

După cum s-a menţionat anterior, formulele calculului propoziţiilor pot fi interpretate şi ca formulele în algebra propoziţiilor. Demonstrând în paragraful anterior necontradicţia calculului propoziţiilor, am arătat că orice formulă deductibilă în calculul propoziţiilor este identic adevărată fiind interpretată ca formulă în algebra propoziţiilor. Apare întrebarea inversă: va fi oare orice formulă identic adevărată în algebra propoziţiilor şi deductibilă în calculul propoziţiilor? Această întrebare ne reprezintă în esenţă *problema completitudinii calculului propoziţiilor*.

Esenţa acestei probleme constă în faptul că la construcţia calculului logic, destinat să exprime logica constructivă, este important de a cunoaşte dacă sunt suficiente axiomele şi regulile de deducţie ale calculului dat pentru a deduce orice formulă, care din punctul de vedere al conţinutului este identic adevărată.

Problema completitudinii calculului propoziţiilor se rezolvă în mod pozitiv. Pentru aceasta vom demonstra iniţial lemele ce ne vor ajuta la demonstraţia teoremei despre completitudinea calculului propoziţiilor.

Cu acest scop vom nota ca şi anterior prin A_a o formulă deductibilă în calculul dat, iar prin A_f – una nedeductibilă (adică $\overline{A_a} = A_f$ şi $\overline{A_f} = A_a$).

Având o formulă arbitrară $U(C)$ cu ajutorul regulii substituţiei putem obţine:
$U(A_a) = S_C^{A_a}U(C)$, $U(A_f) = S_C^{A_f}U(C)$.

Lema 2.9.1 *În calculul propoziţiilor avem* $\vdash [U(A_a)\&U(A_f)] \to \to \{[(A \sim A_a) \to U(A)]\&[(A \sim A_f) \to U(A)]\}$.

Demonstraţie. Din teorema echivalenţei rezultă că poate fi dedusă formula:

(*) $\vdash (A{\sim}B) \to [U(B) \to U(A)]$, unde $U(A) = S_C^{A}U(C)$ şi $U(B) = S_C^{B}U(C)$.

În continuare, demonstraţia teoremei rezultă din următorul şir deductiv:
(1) R.T.I.(*) $\vdash U(B) \to [(A{\sim}B) \to U(A)]$,
(2) $S_{B}^{A_a}(1) \vdash U(A_a) \to [(A{\sim}\, A_a) \to U(A)]$,
(3) $S_{B}^{A_f}(1) \vdash U(A_f) \to [(A{\sim}A_f) \to U(A)]$,
(4) $S_{A,\ \ B}^{U(A_a),\ U(A_f)}(II.1) \vdash [(U(A_a)\&U(A_f)) \to U(A_a)]$,
(5) $S_{A,\ \ B}^{U(A_a),\ U(A_f)}(II.2) \vdash [(U(A_a)\&U(A_f)) \to U(A_f)]$,
(6) R.S.(4),(2) $\vdash [(U(A_a)\&U(A_f))] \to [(A{\sim}A_a) \to U(A)]$,
(7) R.S.(5),(3) $\vdash [(U(A_a)\&U(A_f))] \to [(A{\sim}A_f) \to U(A)]$.

Substituind în axioma (II.3) formula A prin $(U(A_a)\&U(A_f))$, iar B prin $(A{\sim}A_a) \to U(A)$, astfel vom obţine că formula $A \to B$ coincide cu formula obţinută la pasul (6).

Substituind în aceeaşi axiomă (II.3) formula C prin $(A{\sim}A_f) \to U(A)$, în mod analogic vom obţine că formula $A \to C$ coincide cu formula obţinută la pasul (7).

Aplicând de două ori regula M.P. la rezultatul acestei substituţii şi la paşii (6) şi (7), vom avea:
$\vdash [(U(A_a)\&U(A_f))] \to \{[(A{\sim}\, A_a) \to U(A)]\&[(A{\sim}\, A_f) \to U(A)]\}$, c.t.d. □

Lema 2.9.2 $\vdash \{[(A{\sim}\, A_a) \to U(A)]\&[(A{\sim}A_f) \to U(A)]\} \to \{[(A{\sim}\, A_a) \vee (A{\sim}\, A_f)] \to U(A)\}$.

Demonstraţia se observă din următorul şir deductiv:
(1) $S_{A,\ \ B,\ \ C}^{A\sim A_a,\ A\sim A_f,\ U(A)}(III.3) \vdash [(A{\sim}A_a) \to U(A)] \to$
$\to \{[(A{\sim}\, A_f) \to U(A)] \to [((A{\sim}\, A_a) \vee (A{\sim}\, A_f)) \to U(A)]\}$,
(2) R.C.I.(1) $\vdash \{[(A{\sim}\, A_a) \to U(A)]\,\&\,[(A{\sim}\, A_f) \to U(A)]\} \to$
$\to \{[(A{\sim}\, A_a) \vee (A{\sim}\, A_f)] \to U(A)\}$, c.t.d. □

Lema 2.9.3 $\vdash [U(A_a)\&U(A_f)] \rightarrow U(A)$.
Demonstraţie. Aplicând regula silogismului (R.S.) la formulele obţinute în lemele 2.9.1 şi 2.9.2, obţinem:
(1) $[U(A_a)\&U(A_f)] \rightarrow \{[(A\sim A_a) \vee (A\sim A_f)] \rightarrow U(A)\}$.
(2) R.T.I.(1) $\vdash [(A\sim A_a) \vee (A\sim A_f)] \rightarrow \{[U(A_a)\&U(A_f)] \rightarrow U(A)\}$.
În virtutea teoremei 2.7.7 din secţiunea 2.7, avem:
(3) $\vdash [(A\sim A_a) \vee (A\sim A_f)]$,
(4) M.P.(3),(2) $\vdash [U(A_a)\&U(A_f)] \rightarrow U(A)$, c.t.d. $\square$

Considerăm o formulă cu n variabile propoziţionale şi o notăm $U(A_1, A_2, ..., A_n)$.

Vom defini prin inducţie matematică următoarea formulă (unde prin $\prod$ vom nota produsul logic sau conjuncţia tuturor factorilor $U(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$, pentru care cortejul $(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$ primeşte toate 2^n valori posibile din A_a şi A_f):

$$\prod_{(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)=A_a,A_f} U(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n). \qquad (*)$$

Dacă $n = 1$, atunci obţinem:

$$\prod_{(\delta_1)=A_a,A_f} U(\delta_1) = U(A_a)\&U(A_f).$$

Fie definite formulele (*) pentru toate acele formule $U(A_1, A_2, ..., A_n)$ ce conţin n variabile şi $n \leq k$. În virtutea inducţiei, considerăm următorul pas când U conţine $n + 1$ variabile. În acest caz, vom avea următoarea notaţie:

$$\prod_{(\delta_1,...,\delta_k,\delta_{k+1})=A_a,A_f} U(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_{k+1}) =$$

$$= \prod_{(\delta_1,...,\delta_k)=A_a,A_f} U(\delta_1, ..., \delta_k, A_a)\& \prod_{(\delta_1,...,\delta_k)=A_a,A_f} U(\delta_1, ..., \delta_k, A_f).$$

Formula (*) poate fi definită ca conjuncţia tuturor formulelor posibile, ce se obţin din $U(A_1, A_2, ..., A_n)$ substituind toate variabilele $A_1, A_2, ..., A_n$ respectiv cu formulele A_a şi A_f definite anterior.

Luând în consideraţie lema 2.9.3, se poate uşor demonstra prin inducţie şi următoarea lemă.

Lema 2.9.4 *În calculul propoziţiilor este adevărată formula:*

$$\vdash \prod_{(\delta_1,...,\delta_n)=A_a,A_f} U(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) \to U(A_1, A_2, ..., A_n).$$

În temeiul acestor leme poate fi demonstrată teorema de bază despre completitudine.

Teorema 2.9.1 ***(Teorema despre completitudine)***.
Orice formulă identic adevărată în algebra propoziţiilor este o formulă deductibilă în calculul respectiv.

Demonstraţie. Cercetăm o formulă arbitrară identic adevărată în algebra propoziţiilor $U(A_1, A_2, ..., A_n)$. În virtutea lemei 2.9.4 poate fi dedusă formula:

$$\vdash \prod_{(\delta_1,...,\delta_n)=A_a,A_f} U(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) \to U(A_1, A_2, ..., A_n). \qquad (**)$$

Deoarece formula $U(A_1, A_2, ..., A_n)$ este identic adevărată, atunci în rezultatul oricărei substituţii a formulelor A_a şi A_f în locul variabilelor $A_1, A_2, ..., A_n$ din formula U obţinem o formulă deductibilă din calculul propoziţiilor. Prin urmare, în ipoteza

$$\prod_{(\delta_1,...,\delta_n)=A_a,A_f} U(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$$

formulei (**) toţi factorii conjunctivi sunt formule deductibile şi aplicând Regula Conjuncţiei Formulelor (R.C.F.), obţinem că întreaga ipoteză poate fi dedusă, adică:

$$\vdash \prod_{(\delta_1,...,\delta_n)=A_a,A_f} U(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n).$$

În continuare putem aplica regula MP la ultima formulă şi la (**) ca în rezultat să obţinem: $\vdash U(A_1, A_2, ..., A_n)$, c.t.d. $\square$

Remarca 2.9.1 *Am arătat mai sus că noţiunea de formulă deductibilă în calculul propoziţiilor coincide cu noţiunea de formulă identic adevărată din algebra propoziţiilor. Una din consecinţele teoremei despre completitudine este posibilitatea de a transfera în calculul propoziţiilor toate regulile de manipulare cu formulele din algebra propoziţiilor.*

Ca exemplu, din cele spuse rezultă că în calculul propoziţiilor sunt adevărate următoarele afirmaţii.

$\vdash (U\&V) \sim (V\&U)$

$\vdash (U \vee V) \sim (V \vee U)$

$\vdash [U\&(V\&C)] \sim [(U\&V)\&C]$

$\vdash [U \vee (V \vee C)] \sim [(U \vee V) \vee C]$

$\vdash [U\&(V \vee C)] \sim [(U\&V) \vee (U\&C)]$

$\vdash [U \vee (V\&C)] \sim [(U \vee V)\&(U \vee C)]$

$\vdash (U \to V) \sim (\overline{U} \vee V)$

$\vdash (\overline{U\&V}) \sim (\overline{U} \vee \overline{V})$

$\vdash (\overline{U \vee V}) \sim (\overline{U}\&\overline{V})$

Remarca 2.9.2 *Uneori se cercetează şi noţiunea de completitudine într-un sens mai îngust. Vom spune că calculul logic este complet în sens îngust, dacă după alăturare la axiomele acestui calcul a unei formule nedeductibile în acest calcul, obţinem contradicţie, adică calculul nou format în urma acestei alăturări devine contradictoriu.*

Cu ajutorul formelor normale conjunctive se poate de demonstrat că calculul propoziţiilor este necontradictoriu în sens îngust.

2.10 Independenţa axiomelor calculului propoziţiilor

După cum s-a menţionat mai sus, orice calcul logic poate fi descris astfel: se defineşte noţiunea de *formulă* şi noţiunea de *formulă deductibilă*. Aceasta se realizează indicându-se, în primul rând, formulele iniţiale de bază, care se consideră deductibile şi se numesc *axiome*. Şi în al doilea rând, se definesc *regulile de deducţie*, adică astfel de reguli, cu ajutorul cărora din formulele deductibile pot fi construite noi formule deductibile. Pentru orice calcul descris mai sus apare întrebarea despre independenţa axiomelor. Această întrebare constă în următoarele. Poate oare o anumită axiomă să fie dedusă din celelalte în baza regulilor de deducţie a sistemului dat?

Dacă se adevereşte că o astfel de axiomă poate fi dedusă din celelalte, atunci ea poate fi ignorată şi deci poate fi ştearsă din lista de axiome, în aşa fel încât calculul dat rămâne neschimbat, adică rezerva de formule deductibile rămâne la fel neschimbată.

Definiţia 2.10.1 *Axioma care nu poate fi dedusă din celelalte axiome se numeşte axiomă independentă de celelalte, iar sistemul de axiome, în care nicio axiomă nu poate fi dedusă din celelalte se numeşte sistem independent. În caz contrar, sistemul de axiome se numeşte sistem dependent.*

Evident că sistemul dependent nu este atât de săvârşit în comparaţie cu cel independent, deoarece el conţine axiome de prisos. S-ar părea, la prima vedere, că întrebarea despre independenţa sistemului de axiome nu este esenţială şi are importanţă numai din punctul de vedere al comodităţii tehnice. Însă aceasta nu este aşa întotdeauna. Problema independenţei unei axiome dintr-un sistem dat faţă de alte axiome deseori este echivalentă cu problema posibilităţii de a schimba, fără contradicţii în sistemul cercetat, axioma dată cu negaţia ei.

În calitate de exemplu ne poate servi problema independenţei celui de-al cincilea postulat al lui Euclid în sistemul axiomatic al geometriei. Această problemă, după cum se cunoaşte, a avut o mare importanţă în dezvoltarea matematicii.

În continuare, vom demonstra că sistemul din cele patru grupe de axiome ale calculului propoziţiilor este independent. Metoda de demonstrare este asemănătoare cu demonstrarea necontradicţiei calculului dat. Atunci noi am interpretat variabilele propoziţionale în calculul respectiv ca variabile ale algebrei propoziţiilor, care pot primi numai două valori: adevăr (a) şi fals (f), sau 0 şi 1.

Operaţiile logice $\&, \vee, \rightarrow, \rceil$ la această interpretare le definim ca şi în algebra propoziţiilor şi am confirmat că orice formulă deductibilă în calculul propoziţiilor primeşte valoarea de adevăr (1) pentru orice valori ale variabilelor formulei date. Pentru rezolvarea problemei necontradicţiei unei axiome $\mathcal{U}$ din calculul propoziţiilor, vom cerceta problema interpretării variabilelor propoziţionale ca variabile ce primesc valori dintr-o mulţime finită, pe care le vom nota prin litere greceşti $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Operaţiile $\&, \vee, \rightarrow, \rceil$ le vom defini în aşa fel ca să fie îndeplinite următoarele condiţii:

1) Toate axiomele în afară de axioma $\mathcal{U}$, pentru toate variabilele posibile, primesc valoarea α.

2) Fiecare formulă, ce poate fi dedusă din mulţimea axiomelor, în afară de $\mathcal{U}$, la fel primeşte valoarea α pentru toate variabilele posibile din formulă.

3) Axioma $\mathcal{U}$ primeşte valoarea diferită de α pentru oarecare valori ale variabilelor din axioma dată.

Evident, dacă vom găsi aşa o interpretare, atunci va fi demonstrată independenţa axiomei $\mathcal{U}$ în raport cu celelalte axiome, deoarece dacă $\mathcal{U}$ ar fi deductibilă din celelalte axiome, atunci ar primi valoarea α pentru toate variabilele posibile.

Remarcăm faptul că formulele în care în locul variabilelor se substituie oarecare valori ale lor, de asemenea, au sens şi pot fi scrise astfel: $\alpha\&\beta$, $\rceil\alpha, \alpha \to \beta$, $\beta \to A$, $A \vee \gamma$ ş.a.

În cazul în care două formule U şi B primesc valori identice pentru orice valori ale variabilelor (sunt identic egale) $\alpha, \beta, ...$ în continuare vom scrie prescurtat semnul egalităţii: $U = B$.

Vom considera mai departe că semnul egalităţii (=) este o legătură mai slabă (inferioară) decât celelalte operaţii logice: $\&, \vee, \to, \rceil$.

Vom demonstra mai întâi independenţa axiomei (II.1) $(A\&B) \to A$.
Pentru aceasta vom interpreta variabilele propoziţionale ca variabile ce primesc două valori α şi β, unde α va coincide cu valoarea de adevăr (1), iar β – valoarea fals (0). Toate operaţiile logice în afară de conjuncţie le vom defini analogic ca în algebra propoziţiilor:

$$\alpha \to \alpha = \alpha;\ \beta \to \beta = \alpha;\ \beta \to \alpha = \alpha;\ \alpha \to \beta = \beta;$$
$$\alpha \vee \alpha = \alpha;\ \alpha \vee \beta = \alpha;\ \beta \vee \alpha = \alpha;\ \beta \vee \beta = \beta;$$
$$\rceil\alpha = \beta;\ \rceil\beta = \alpha.$$

Operaţia de conjuncţie o vom defini cu următoarea condiţie: $A\&B = B$. Vom arăta că toate axiomele I-IV, în afară de axioma (II.1) obţin valoarea α pentru toate variabilele posibile.

În axiomele grupelor I, III şi IV conjuncţia nu participă, iar celelalte operaţii sunt întocmai ca şi în algebra propoziţiilor. Deoarece în algebra propoziţiilor ele sunt identic adevărate, atunci şi pentru interpretarea dată ele primesc valoarea α pentru orice valori ale variabilelor.

Cercetăm axioma (II.2)$(A\&B) \rightarrow B$. În interpretarea dată ea primeşte valoarea α, deoarece la o astfel de interpretare ea coincide cu formula $B \rightarrow B$.

Axioma (II.3) la această interpretare va trece în formula $(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow C)] \rightarrow (A \rightarrow C)]$.

Ultima formulă nu conţine conjuncţia şi de aceea ea este identic adevărată în algebra propoziţiilor. Prin urmare, ea primeşte valoarea α pentru toate valorile variabilelor.

În final, cercetăm axioma (II.1)$(A\&B) \rightarrow A$ şi vom arăta că ea nu este identic egală cu α. Într-adevăr, pentru $A = \beta$ şi $B = \alpha$ axioma (II.1) va avea forma $\beta\&\alpha \rightarrow \beta$. Însă prin definiţia conjuncţiei de mai sus avem $\beta\&\alpha = \alpha$. De aceea această formulă va avea forma $\alpha \rightarrow \beta$, însă din condiţiile iniţiale rezultă că ultima expresie are valoarea β.

Să arătăm, în continuare, că formulele ce se obţin cu ajutorul regulilor de deducţie din acele formule, care sunt identic egale cu α, de asemenea primesc valoarea α pentru orice valori ale variabilelor.

Pentru regula substituţiei, aceasta este evident, deoarece dacă formula primeşte valoarea α pentru orice valori ale variabilelor, atunci la fel va fi şi formula ce se obţine din aceasta la orice subtituţie a variabilelor.

Cercetăm regula M.P. Fie că formulele F şi $F \rightarrow G$ sunt egale cu α pentru orice valori ale variabilelor. Însă atunci obţinem $F \rightarrow G = \alpha \rightarrow G$. În acest caz, formula G nu poate primi valoarea β, deoarece vom obţine $F \rightarrow G = \alpha \rightarrow \beta = \beta$, ceea ce nu poate fi.

Astfel, am demonstrat independenţa axiomei (II.1).

Remarcăm că independenţa oricărei axiome din grupele II-IV poate fi demonstrată după următoarea schemă.

Tabelul 2.10.1. *Analiza axiomelor*

Axioma	**Operaţia deosebită**	**Valorile variabilelor**
II.1. $(A\&B) \to A$	$A\&B = B$	$A = \beta, B = \alpha$
II.2. $(A\&B) \to B$	$A\&B = A$	$A = \alpha, B = \beta$
II.3. $(A \to B) \to [(A \to C) \to (A \to (B\&C))]$	$A\&B = \beta$	$A = \alpha, B = \alpha, C = \alpha$
III.1. $A \to (A \vee B)$	$A \vee B = B$	$A = \alpha, B = \beta$
III.2. $B \to (A \vee B)$	$A \vee B = A$	$A = \beta, B = \alpha$
III.3. $(A \to C) \to [(B \to C) \to ((A \vee B) \to C)]$	$A \vee B = \alpha$	$A = \beta, B = \beta, C = \beta$
IV.1. $A \to \overline{\overline{A}}$	$\overline{A} = \alpha$	$A = \alpha$
IV.2. $\overline{\overline{A}} \to A$	$\overline{A} = \beta$	$A = \beta$
IV.3. $(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$	$\overline{A} = A$	$A = \beta, B = \alpha$

Admitem că toate variabilele pot primi numai două valori: α şi β. Toate operaţiile logice $\&, \vee, \to, \rceil$, în afară de una din ele, le definim la fel ca în algebra propoziţiilor, unde α este adevăr (1), iar β, respectiv, este fals (0). Operaţia pe care o excludem o definim, în aşa fel încât axioma, pentru care trebuie demonstrată independenţa, să nu fie identic egală cu α. Pentru a nu da demonstraţia tuturor axiomelor, vom prezenta *tabelul 2.10.1*, unde în prima coloană este însăşi axioma, pentru care trebuie demonstrată independenţa, în coloana a doua este definită una din operaţiile logice $\&, \vee, \rightarrow, \rceil$, care se deosebeşte de operaţia tradiţională din algebra propoziţiilor, iar în coloana a treia sunt indicate acele valori ale variabilelor, pentru care axioma respectivă primeşte valoarea β.

La toate aceste interpretări, axiomele din grupul respectiv, în afară de acel grup, în care se întâlneşte axioma cercetată, iau valoarea α pentru toate valorile variabilelor. Aceasta se întâmplă, pentru că axiomele acestor grupe nu conţin operaţia deosebită de cea tradiţională din algebra propoziţiilor. Şi, prin urmare, interpretarea acestor formule coincide cu formulele din algebra propoziţiilor. De aceea toate aceste formule iau valoarea α pentru orice valori ale variabilelor.

Pentru axioma acelui grup, în care se include axioma cercetată, se poate demonstra printr-un control nemijlocit că două din aceste axiome sunt identic egale cu α, iar însăşi axioma dată primeşte valoarea β, pentru acele valori ale variabilelor, care sunt indicate în coloana a treia.

Demonstraţia faptului că regulile de deducţie, aplicate la formule identic egale cu α generează la fel formule de acelaşi tip pentru toate interpretările, va fi analogică ca şi în cazul demonstraţiei independenţei axiomei (II.1).

Astfel, rămâne de demonstrat independenţa axiomelor din grupul I. Demonstraţia independenţei acestor axiome va fi mai dificilă, deoarece operaţia de implicaţie ($\rightarrow$) se include în toate cele patru grupe de axiome.

Interpretarea pe care o vom aplica pentru demonstraţia independenţei axiomelor grupei I, satisface următoarele condiţii generale:

$$\begin{cases} A \rightarrow A = \alpha; A \rightarrow \alpha = \alpha; \beta \rightarrow A = \alpha; \\ A \& B = B \& A; A \& \alpha = A; A \& \beta = \beta; \\ A \vee B = B \vee A; A \vee \alpha = \alpha; A \vee \beta = A; \\ \rceil\alpha = \beta; \rceil\beta = \alpha; A \& A = A; A \vee A = A. \end{cases} \tag{a}$$

Evident, aceste condiţii sunt compatibile, deoarece sunt satisfăcute, de exemplu, de interpretarea pe care o prezintă algebra propoziţiilor, dacă α este adevăr (1), iar β, respectiv, fals (0). Însă aceste condiţii, după cum vom arăta în continuare, nu determină interpretarea dată în mod univoc.

Pentru demonstraţia independenţei axiomei (I.1), vom alege următoarea interpretare. Variabilele vor primi valorile $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. În afară de condiţiile (a), vom cere să fie îndeplinite şi următoarele condiţii:

$$\begin{cases} \alpha \rightarrow \beta = \beta; \alpha \rightarrow \gamma = \beta; \alpha \rightarrow \delta = \beta; \\ \gamma \rightarrow \beta = \beta; \gamma \rightarrow \delta = \beta; \\ \delta \rightarrow \beta = \beta; \delta \rightarrow \gamma = \alpha; \\ \gamma \& \delta = \delta; \gamma \vee \delta = \delta; \rceil\gamma = \delta; \rceil\delta = \gamma. \end{cases} \tag{b}$$

Uşor se observă că condiţiile (a) şi (b) determină complet interpretarea dată. De exemplu, implicaţia ($\rightarrow$) se defineşte de condiţiile (a) şi (b) în mod univoc.

Operaţia & şi $\vee$, la fel definesc condiţiile (a), în cazul când un membru sau este α, sau este β, sau ambii membri sunt egali.

Rămâne de cercetat cazul când unul din membri este γ, iar celălalt δ. În acest caz, operaţia se defineşte complet din condiţiile $A\&B = B\&A$, $A \vee B = B \vee A$ din (a) şi (b). Operaţia $\rceil$ în mod evident se determină univoc din condiţiile (a) şi (b).

Din condiţiile (a) şi (b), rezultă că, la aplicarea regulii M.P. la formule identic egale cu α, obţinem ca rezultat, la fel formule identic egale cu α.

Într-adevăr, dacă $U = \alpha$ şi $U \rightarrow B = \alpha$, atunci $\alpha \rightarrow B = \alpha$. Însă din condiţiile (a) şi (b) se observă că dacă $B \neq \alpha$, atunci $\alpha \rightarrow B \neq \alpha$. De aceea obţinem $B = \alpha$.

În cazul aplicării substituţiei într-o formulă identic egală cu α, obţinem, în mod evident, la fel o formulă identic egală cu α pentru oricare interpretare.

Astfel, ambele reguli de deducţie, fiind aplicate la formule identic egale cu α, ne dau ca rezultat formule de acelaşi fel.

În plus, interpretarea cercetată satisface condiţia că dacă variabilele obţin valoarea α şi β, atunci operaţiile $\&, \vee, \rightarrow$ şi $\rceil$ sunt la fel ca în algebra propoziţiilor, dacă considerăm α – adevăr (1), iar β – fals (0).

În interpretarea dată, axioma (I.1) pentru valorile variabilelor $A = \delta$, $B = \alpha$ va avea valoarea β.

Într-adevăr, pentru aceste valori ale variabilelor, axioma dată se transformă în formula $\delta \to (\alpha \to \delta)$. Din condiţiile (b) avem $\alpha \to \delta = \beta$ şi atunci ca rezultat obţinem $\delta \to \beta = \beta$.

Se poate de arătat că celelalte axiome pentru toate valorile variabilelor vor avea valoarea α. Aceasta poate fi demonstrat prin controlul nemijlocit al tuturor variabilelor din axiomele date. Ne vom limita numai la cercetarea a trei axiome, şi anume, (I.2), (II.1) şi (IV.3).

Cercetăm axioma (I.2) $[A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$. Vom arăta iniţial că dacă $A \to B = \alpha$ şi $B \to C = \alpha$, atunci şi $A \to C = \alpha$ şi, prin urmare, întreaga axiomă (I.2) are valoarea α. Într-adevăr, dacă $A \to B = \alpha$, atunci sunt posibile următoarele cazuri:

1) $A = \beta$, 2) $B = \alpha$, 3) $A = B$, 4) $A = \delta$, $B = \gamma$.

În primele trei cazuri nemijlocit se observă că $A \to C = \alpha$, deoarece pentru $B = \alpha$ din faptul că $B \to C = \alpha$ rezultă $C = \alpha$. În ultimul caz 4), deoarece $B \to C = \alpha$, atunci formula poate lua numai două valori: γ şi α, formula $A \to C = \alpha$.

Rămâne să demonstrăm cazul când sau $A \to B$, sau $B \to C$ nu sunt egale cu α. Remarcăm faptul că implicaţia, după cum se observă din (a) şi (b), poate să primească numai două valori α sau β. Dacă $A \to B = \beta$, atunci $(A \to B) \to (A \to C) = \alpha$ şi întreaga axiomă (I.2) are valoarea α.

În final, cercetăm cazul $B \to C = \beta$. Dacă în acest caz $A \neq \beta$, atunci $A \to (B \to C) = \beta$ şi toată axioma (I.2) are valoarea α. Dacă însă $A = \beta$, atunci $A \to C = \alpha$ şi iarăşi întreaga axiomă (I.2) este identic egală cu α. Astfel, am obţinut că axioma (I.2) primeşte valoarea α pentru toate valorile variabilelor.

Cercetăm axioma (II.1): $(A\&B) \to A$. În cazul, când A sau B primeşte valoarea β, avem $A\&B = \beta$ şi de aceea $(A\&B) \to A = \alpha$. Dacă însă $A = \alpha$, atunci axioma (II.1) la fel primeşte valoarea α. Dacă $B = \alpha$, atunci $A\&B = A$, $(A\&B) \to A = A \to A = \alpha$ şi din nou axioma (II.1) are valoarea α. Dacă $A = B$, atunci axioma (II.1) se transformă în $(A\&A) \to A$. Aplicând condiţiile (a), vom obţine în continuare $(A\&A) \to A = A \to A = \alpha$.

Rămâne să cercetăm cazul când A şi B vor lua valorile δ şi γ, pentru care $A \neq B$.

În virtutea comutativităţii conjuncţiei, e suficient să demonstrăm două cazuri: $\gamma\&\delta \to \gamma$ şi $\gamma\&\delta \to \delta$. Însă $\gamma\&\delta = \delta$. De aceea, prima expresie se transformă în $\delta \to \gamma$, iar a doua în $\delta \to \delta$.

Din condiţiile (a) şi (b) rezultă că ambele aceste expresii au valoarea α.

Cercetăm axioma (IV.3): $(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$.

Din cele spuse mai sus, implicaţia $A \to B$ poate lua numai două valori α şi β. Dacă $A \to B = \beta$, atunci axioma (IV.3) va avea valoarea α. Fie că $A \to B = \alpha$. Atunci sunt posibile următoarele cazuri:

1) $A = \beta$, 2) $B = \alpha$, 3) $A = B$, 4) $A = \delta$, $B = \gamma$.

Din condiţiile (a) şi (b) se observă că în fiecare din aceste cazuri obţinem $\overline{B} \to \overline{A} = \alpha$ şi, prin urmare, axioma (IV.3) la fel are valoarea α.

În final, vom demonstra independenţa axiomei (I.2). Cu acest scop, vom alege o interpretare în care variabilele pot să primească trei valori: α, β şi γ.

Operaţiile vor îndeplini condiţiile (a) şi următoarele condiţii adăugătoare:

(c) $\alpha \to \beta = \beta$; $\alpha \to \gamma = \gamma$; $\gamma \to \beta = \gamma$; $\rceil\gamma = \gamma$.

Din aceste condiţii (a) şi (c) se observă că operaţiile de implicaţie ($\to$) şi negaţie ($\rceil$) sunt definite complet.

Operaţiile & şi $\vee$ în acest caz sunt definite complet de condiţiile (a). De exemplu, să cercetăm conjuncţia $A\&B$. Dacă una din variabile are valoarea α sau β, atunci $a\&B$ se defineşte de condiţiile (a). Dacă ambele variabile obţin valoarea γ, atunci $A\&B$ la fel are valoarea γ.

La o astfel de interpretare axioma (I.2): $[A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$ pentru un set de valori ale variabilelor obţine valoarea γ, iar celelalte axiome iau valoarea α pentru toate valorile posibile ale variabilelor.

Vom arăta, în primul rând, valorile variabilelor, pentru care axioma (I.2) are valoarea γ. Fie $A = \gamma$, $B = \gamma$, $C = \beta$, atunci obţinem axioma (I.2) în forma:

$$[\gamma \to (\gamma \to \beta)] \to [(\gamma \to \gamma) \to (\gamma \to \beta)] =$$
$$(\gamma \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma) = \alpha \to (\alpha \to \gamma) = \alpha \to \gamma = \gamma.$$

Vom demonstra, în mod selectiv, că toate celelalte axiome în interpretarea respectivă sunt identic egale cu α. Cercetăm axioma (I.1): $A \to (B \to A)$. În cazul când $A = B$, această axiomă are valoarea α. În cazul când $A = \alpha$, avem $B \to A = \alpha$ şi, prin urmare, axioma dată la fel are valoarea α. Pentru cazul $A = \beta$, la fel vom avea $A \to (B \to A) = \alpha$.

Rămâne să cercetăm cazul $A = \gamma$. În acest caz, vom avea: $\gamma \to (B \to \gamma)$. Însă formula $B \to \gamma$ poate să primească două valori: α sau γ. În ambele cazuri, vom avea rezultatul:
$\gamma \to (B \to \gamma) = \alpha$.

Cercetăm axioma (III.1): $A \to (A \vee B)$. Dacă $A = \beta$, atunci $\beta \to (\beta \vee B) = \alpha$.

Dacă $A = \alpha$, atunci $(A \vee B) = \alpha$, de unde obţinem $\alpha \to (\alpha \vee B) = \alpha \to \alpha = \alpha$.

Fie că $A = \gamma$. Atunci vom avea $\gamma \to (\gamma \vee B)$. Dacă $B = \alpha$ sau $B = \gamma$, atunci $\gamma \to (\gamma \vee B) = \alpha$.

Dacă $B = \beta$, atunci $\gamma \vee B = \gamma$ şi obţinem la fel $\gamma \to (\gamma \vee B) = \gamma \to \gamma = \alpha$.

Vom cerceta în final axioma (IV.3): $(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$. În cazul când A şi B au valoarea α sau β, atunci această axiomă va avea valoarea α, deoarece au loc legile algebrei propoziţiilor.

Dacă $A = B$, atunci axioma va avea forma $\alpha \to \alpha = \alpha$.

Fie că $A = \gamma$ şi atunci obţinem $(\gamma \to B) \to (\overline{B} \to \overline{\gamma})$.

Însă $\overline{\gamma} = \gamma$, prin urmare ultima expresie devine $(\gamma \to B) \to (\overline{B} \to \gamma)$.

Dacă $B = \alpha$, atunci $\overline{B} = \beta$, de unde obţinem $\overline{B} \to \gamma = \alpha$

şi toate expresiile au valoarea α.

Dacă $B = \beta$, atunci obţinem $(\gamma \to \beta) \to (\overline{\beta} \to \overline{\gamma}) = (\gamma \to \beta) \to (\alpha \to \gamma) = (\gamma \to \gamma) = \alpha$.

În final, dacă $B = \gamma$, dar $A = \beta$, atunci vom obţine:
$(\beta \to \gamma) \to (\overline{\gamma} \to \overline{\beta}) = (\beta \to \gamma) \to (\gamma \to \alpha) = (\alpha \to \alpha) = \alpha$.

Astfel, axioma (IV.3) va avea valoarea α pentru orice valori ale variabilelor. În mod analogic se demonstrează acelaşi fapt pentru toate celelalte axiome. Prin urmare, am finalizat demonstrarea independenţei sistemului de axiome ale calculului propoziţiilor.

2.11 Axiomatizări alternative ale calculului propoziţiilor

Până în prezent am cercetat calculul propoziţiilor, luând în consideraţie sistemul de axiome din cele patru grupuri, definit anterior, în care în total avem 11 axiome.

Există însă şi alte axiomatizări ale aceluiaşi calcul al propoziţiilor. În plus, poate varia nu doar sistemul de axiome, dar şi lista operaţiilor logice (legăturilor sau operatorilor logici) iniţiale (sau primare).

În continuare, vom da două exemple de axiomatizări alternative ale calculului propoziţiilor.

Exemplul 2.11.1 *În calitate de operaţii de bază (iniţiale) se consideră implicaţia ($\to$) şi negaţia ($\rceil$). Celelalte operaţii logice se definesc în mod tradiţional, şi anume:*

$$A \& B = \rceil\,(A \to \rceil B)\,, \qquad A \vee B = \rceil A \to B.$$

În acest caz, în calitate de axiome putem lua următoarea schemă:

$$A \to (B \to A), \tag{1}$$

$$[A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)], \tag{2}$$

$$(\rceil B \to \rceil A) \to [(\rceil B \to A) \to B]. \tag{3}$$

Pentru acest caz este suficientă o singură regulă de deducţie, cunoscută deja, regula *Modus Ponens* (*M.P.*).

Propunem cititorului să demonstreze că mulţimile de formule deductibile în acest caz coincid cu mulţimea respectivă din cele patru grupe de axiome date anterior.

Exemplul 2.11.2 *În anul 1938 D. Hilbert şi W. Achermann au considerat un alt sistem bazat pe operatorii (operaţiile logice): disjuncţia şi negaţia* ($\vee, \rceil$)*. Celelalte operaţii se definesc în mod tradiţional:* $A \& B = \rceil\,(\rceil A \vee \rceil B)$, $\qquad A \to B = \rceil A \vee B$.

În acest caz, în calitate de axiome se consideră următoarea schemă:

$$(A \vee A) \to A, \tag{4}$$

$$A \to (A \vee B), \tag{5}$$

$$(A \vee B) \to (B \vee A), \tag{6}$$

$$(B \to C) \to [(A \vee B) \vee \rceil\,(A \vee B)]. \tag{7}$$

Pentru acest caz, e suficientă doar regula de deducţie M.P.

Şi în atare caz propunem cititorului să demonstreze că toate aceste axiomatizări cu regulile de deducţie respective sunt echivalente, adică mulţimile de formule deductibile în fiecare dintre ele coincid.

Demonstrăm în continuare, în calitate de exemplu, că sistemul de axiome (1),(2),(3) definit anterior este independent.

Să demonstrăm pentru început independenţa axiomei (1). În acest scop, vom folosi următoarea interpretare. Fie că toate variabilele pot să primească următoarele valori: 0, 1 şi 2, iar operaţiile de bază sunt descrise de următoarele tabele:

Tabelul 2.11.1 (a, b)

A	$\rceil A$
0	1
1	1
2	0

A	B	$A \to B$
0	0	0
1	0	2
2	0	0
0	1	2
1	1	2
2	1	0
0	2	2
1	2	0
2	2	0

Evident că, în baza acestor tabele, putem evalua orice formulă.

Vom spune că formula A este *marcată*, dacă ea obţine valoarea 0 pentru orice valori ale variabilelor din această formulă. Observăm că regula de deducţie *Modus Ponens* (*M.P.*) conservă această proprietate a formulelor de a fi marcate.

Uşor se verifică, utilizând tabelele de mai sus, că axiomele

(2) şi (3) sunt marcate. Dar axioma (1) $A \to (B \to A)$ nu este marcată, deoarece în cazul când A ia valoarea 1, iar B respectiv are valoarea 2, atunci axioma dată va avea valoarea 2. Prin urmare, axioma (1) este independentă faţă de celelalte două axiome.

Pentru a demonstra independenţa axiomei (2), vom cerceta aceeaşi interpretare a variabilelor 0, 1, 2, iar operaţiile de bază le vom defini cu următoarele tabele:

Tabelul 2.11.2 (a, b)

A	$\rceil A$
0	1
1	0
2	1

A	B	$A \to B$
0	0	0
1	0	0
2	0	0
0	1	2
1	1	2
2	1	0
0	2	1
1	2	0
2	2	0

Vom spune că formula A este *grotexă*, dacă ea obţine valoarea 0 pentru orice valori ale variabilelor din această formulă. Se verifică nemijlocit, utilizând tabelele date, că regula de deducţie M.P., precum şi orice formulă ce se obţine din axiomele (1) şi (3) conservă *proprietatea de grotexitate* a formulelor.

Însă axioma (2) $[A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to$

$C)]$ nu este *grotexă*, deoarece obţine valoarea 2 în cazul când A este 0, B este la fel 0, iar C are valoarea 1.

Să demonstrăm, în final, că axioma (3) este independentă de celelalte. Pentru aceasta considerăm aplicaţia h din mulţimea tuturor formulelor în mulţimea formulelor fără negaţii (adică anulează toate negaţiile din formula dată).

De exemplu, $h(\rceil(\rceil A \to \rceil B)) = A \to B$.

Dacă formula A este una din axiomele (1) sau (2), atunci evident că $h(A) = A$. Prin urmare, $h(A)$ este o tautologie (funcţie identică).

Este evident că $h(A \to B) = h(A) \to h(B)$. În consecinţă, deducem că şi regula de deducţie M.P., aplicată tautologiilor $h(A \to B)$ şi $h(A)$, ne permite să obţinem tautologia $h(B)$.

Prin urmare, orice formulă A deductibilă din formulele (1) şi (2) cu ajutorul regulii M.P. posedă proprietatea că $h(A)$ este tautologie. Însă pentru axioma (3) $(\rceil B \to \rceil A) \to [(\rceil B \to A) \to B]$ aplicăm regula substituţiei şi obţinem:

$$S_B^A(3) \vdash (\rceil A \to \rceil A) \to [(\rceil A \to A) \to A].$$

La ultima formulă utilizăm aplicaţia h definită mai sus şi obţinem $h\{(\rceil A \to \rceil A) \to [(\rceil A \to A) \to A]\}$.

Evident că ultima aplicaţie nu este o tautologie şi, prin urmare, nu poate fi dedusă din axiomele (1) şi (2) folosind regula de deducţie M.P.

Astfel, am arătat că axioma (3) este independentă faţă de celelalte două axiome.

2.12 Exerciţii propuse pentru lucrul individual

Ex.1. Să se deducă din axiome următoarele formule în calculul propoziţiilor:
1. $\vdash \overline{\overline{A}} \to ((A \to B) \to A)$;
2. $A \to (B \to (A \& B))$;
3. $(A \to \overline{A}) \to \overline{A}$;
4. $\overline{((A \to B) \to A)} \to \overline{A}$;
5. $B \to (\overline{B} \to (\overline{A \to B}))$;
6. $(\overline{A} \to (A \to \overline{B}))$;
7. $\overline{(A \vee B)} \to \overline{A} \& \overline{B}$;
8. $\overline{(A \& B)} \to \overline{A} \vee \overline{B}$;
9. $(A \to (\overline{A} \to B)$;
10.$\overline{A} \& \overline{B} \to \overline{(A \vee B)}$;
11.$\overline{A} \vee \overline{B} \to \overline{(A \& B)}$.

Ex.2. Să se demonstreze din axiome următoarele echivalenţe în calculul propoziţiilor:
1. $(A \to \overline{A}) \sim \overline{A}$;
2. $(A \vee (A \& B)) \sim A$;
3. $(A \vee (B \& \overline{B})) \sim A$;
4. $(A \& (B \vee \overline{B})) \sim A$;
5. $(A \& (A \vee B)) \sim A$.

Ex.3. Să se demonstreze următoarele formule din axiomele calculului propoziţiilor şi din lista de formule Γ dată:
1. $\{\overline{A}\} \vdash (A \to \overline{\overline{B}})$;

2. $\{A\} \vdash \overline{(A \to \overline{A})}$;
3. $\{A \sim B, B \sim C\} \vdash \overline{A} \sim \overline{C}$;
4. $\{A, B, A \to B\} \vdash \overline{B} \to (\overline{A \to B})$;
5. $\{A \to B, \overline{B}\} \vdash \overline{A}$;
6. $\{A, \overline{B}\} \vdash (\overline{A \to B})$;
7. $\{A \to B\} \vdash (A\&C) \to (B\&C)$;
8. $\{A \to B\} \vdash (C \to A) \to (C \to B)$;
9. $\{A \to B\} \vdash (A \vee C) \to (B \vee C)$;
10. $\{A\} \vdash (\overline{A} \to B)$;
11. $\{\overline{A}\} \vdash (A \to B)$;
12. $\{A \to \overline{B}\} \vdash (B \to \overline{A})$;
13. $\{\overline{A} \to B\} \vdash (\overline{B} \to A)$;
14. $\{\overline{A} \to \overline{B}\} \vdash (B \to A)$;
15. $\{A \sim B\} \vdash (C \to A) \sim (C \to B)$;
16. $\{A \sim B\} \vdash (A \vee C) \sim (B \vee C)$;
17. $\{A \sim B\} \vdash (A \to C) \sim (B \to C)$.

Ex.4. Să se demonstreze următoarele formule în calculul propoziţiilor;

a. $\vdash (A\&B) \sim (B\&A)$;
b. $\vdash (A \vee B) \sim (B \vee A)$;
c. $\vdash [A\&(B\&C)] \sim [(A\&B)\&C]$;
d. $\vdash [A \vee (B \vee C)] \sim [(A \vee B) \vee C]$;
e. $\vdash [A\&(B \vee C)] \sim [(A\&B) \vee (A\&C)]$;
f. $\vdash [A \vee (B\&C)] \sim [(A \vee B)\&(A \vee C)]$;
g. $\vdash (A \to B) \sim (\overline{A} \vee B)$;
h. $\vdash (\overline{A\&B}) \sim (\overline{A} \vee \overline{B})$; i. $\vdash (\overline{A \vee B}) \sim (\overline{A}\&\overline{B})$.

Ex.5. Să se demonstreze că următoarele formule sunt realizabile, fără a construi tabelul de valori, doar analizând cazurile posibile în funcţie de valorile atribuite variabilelor logice: a) $\neg(P \to \neg P)$; b) $(P \to Q) \to (Q \to P))$;
c) $(Q \to (P\&R))\&\neg((P \vee R) \to Q)$; d) $\neg((P \leftrightarrow \neg Q) \vee R)\&Q$;
e) $(((P \to Q) \to (R \to Q)) \to (R \to P)) \to (P \to Q)$;
f) $(Q \to \neg P) \to P) \to (P \to (\neg P \to Q))$;
g) $(P \to ((Q \to R) \to R)) \to ((P \to (Q \to R)) \to (P \to R))$;
h) $((P \to Q)\&(Q \to R)) \to (\neg R \to \neg P)$;
i) $((P \leftrightarrow Q)\&(Q \leftrightarrow R)) \to (P \vee R))$;
j) $((P\&\neg Q) \vee (\neg P\&Q)) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$;
k) $(P\&Q) \to ((R \vee Q) \to (Q\&\neg Q))$.

Ex.6. Să se determine valoarea logică a ultimei propoziţii pornind de la valorile logice ale propoziţiilor precedente:
a) $\lambda(A \to B) = 1, \lambda(A \leftrightarrow B) = 0, \lambda(B \to A) = ...$
b) $\lambda(A \to B) = 1, \lambda((\neg A \vee B) \to (\neg A \vee B)) = ...$
c) $\lambda(A \leftrightarrow B) = 0, \lambda(\neg B \to A) = ...$
d) $\lambda(A\&B) = 0, \lambda(A \to B) = 1, \lambda(B \to \neg A) = ...$
e) $\lambda(A \leftrightarrow B) = 0, \lambda(A \to B) = 1, \lambda((\neg A \to B) \leftrightarrow A) = ...$
f) $\lambda(A \vee B) = 1, \lambda(A \to B) = 1, \lambda(\neg B \to A) = ...$
g) $\lambda(A\&B) = 0, \lambda(A \leftrightarrow B) = 0, \lambda(A \to B) = 1, \lambda(A) = ...$
h) $\lambda(A\&B) = 0, \lambda(A \leftrightarrow B) = 0, \lambda(A \to B) = 1, \lambda(B) = ...$
i) $\lambda(A\&B) = 0, \lambda(A \vee B) = 1, \lambda(A \to B) = 1, \lambda(B \to A) = ...$
j) $\lambda(A \to (B \leftrightarrow A)) = 0, \lambda(A \to B) = ...$
k) $\lambda(A \vee B) \to A) = 1, \lambda(A \to B) = 1, \lambda(\neg A \leftrightarrow \neg B) = ...$
l) $\lambda(A \leftrightarrow B) = 1, \lambda((A \to B)\&((\neg A \to \neg B) = ...$

Glosar de abrevieri şi noţiuni utilizate în capitolul 2:

- Axiomele calculului propoziţiilor;
- Regula Substituţiei ($S_A^B F(A)$);
- Regula Modus Ponens (M.P.);
- Regula Modus Tollens (M.T.);
- Teorema Deducţiei (T.D.);
- Regula Silogismului (R.S.);
- Regula Silogismului Generalizată (R.S.G.);
- Regula Transpunerii (sau Transpoziţiei) Ipotezelor (R.T.I.);
- Regula Conjuncţiei Formulelor (R.C.F.);
- Regula Despărţirii Formulelor (R.D.F.);
- Regula Conjuncţiei Ipotezelor (R.C.I.);
- Regula Despărţirii Ipotezelor (R.D.I.);
- Regula Inversării (de Inversie) (R.I.);
- Teorema echivalenţei;
- Legea terţului exclus;
- Necontradicţia calculului propoziţiilor;
- Completitudinea calculului propoziţiilor;
- Independenţa axiomelor calculului propoziţiilor.

3 Teoria mulţimilor

Obiective de referinţă:

- să cunoască şi să aplice corect operaţiile asupra mulţimilor;
- să cunoască şi să aplice proprietăţile şi teoremele care se referă la operaţiile asupra mulţimilor;
- să construiască diferite mulţimi aplicând operaţiile asupra mulţimilor;
-să cunoască operaţiile asupra numerelor cardinale;
- să determine cardinalul mulţimilor şi să construiască mulţimi echivalente în raport cu cardinalul lor;
- să determine care mulţimi sunt numărabile;
- să aplice noţiunile teoriei mulţimilor pentru probleme aplicative.

3.1 Noţiune de mulţime. Egalitatea mulţimilor

Fondatorul teoriei mulţimilor este matematicianul german Georg Cantor (1845-1918). El considera că mulţimea este *,,o colecţie de obiecte bine determinate, distincte ale intuiţiei sau gândirii noastre, considerate ca un tot întreg".*

Ideea de *,,mulţime"* este considerată ca o noţiune primară, fapt pentru care nu se dă definiţie. Totodată, o mulţime poate fi definită prin indicarea (enumerarea) elementelor sale, sau prin formularea unor proprietăţi caracteristice elementelor şi numerelor. În calitate de exemplu menţionăm câteva mulţimi

prestabilite: *mulţimea numerelor naturale* (notată prin $\mathbb{N}$), *mulţimea numerelor întregi* ($\mathbb{Z}$), *mulţimea numerelor raţionale* ($\mathbb{Q}$), *mulţimea numerelor reale* ($\mathbb{R}$) şi *mulţimea numerelor complexe* ($\mathbb{C}$). Propunem câteva exemple de mulţimi care sunt definite prin formularea unor proprietăţi ale elementelor:
A – mulţimea tuturor numerelor pozitive divizibile la 3;
B – mulţimea tuturor numerelor întregi pozitive pare;
C – mulţimea tuturor numerelor negative impare din intervalul de la -10 la -2;
$D = \{a, b, e, f, g, h\}$; $E = \{2; 5.7; -3,25; \frac{100}{5}; \sqrt{9}; 2-i; \sqrt{-1}\}$;
$X = \{x \text{ din } \mathbb{N} : 10 < x \leq 100\}$;
$Y = \{y \text{ din } \mathbb{R} : -10.5 \leq y < \infty\}$.

Aceste mulţimi vor fi des utilizate în paragrafele următoare pentru exemplificarea noţiunilor şi operaţiilor asupra mulţimilor. O mulţime poate fi finită (conţine un număr finit de elemente): $\{a, b, c\}$, sau poate fi infinită (conţine un număr infinit de elemente): $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, ...\}$,
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.

În continuare, pentru formularea unor operaţii asupra mulţimilor şi a proprietăţilor lor, nu vom face nicio precizare în privinţa naturii obiectelor din care sunt formate mulţimile (în caz general). Dar exemplele care vor fi prezentate pe parcurs vor da claritate noţiunilor şi vor spori nivelul de comprehensiune a acestora.

Dacă obiectul a aparţine mulţimii A, atunci vom spune că a este un element al mulţimii A, sau că mulţimea A conţine elementul a şi vom nota: $a \in A$, unde ”$\in$” este semnul *,,relaţiei de apartenenţă”.*

Negaţia propoziţiei $a \in A$ o vom scrie $a \notin A$ şi vom citi ,,a nu este un element din mulţimea A sau nu aparţine mulţimii A”. Folosind simbolurile logice, putem scrie $a \notin A \iff \neg(a \in A)$ sau, folosind principiul dublei negaţii, avem: $a \in A \iff \neg(a \notin A)$. Menţionăm următoarele exemple.

Exemplul 3.1.1 *1) Următoarele exemple exprimă apartenenţa unor valori numerice la mulţimile:* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ *sau neapartenenţa lor.* $1 \in \mathbb{N}$; $-5 \notin \mathbb{N}$; $-5 \in \mathbb{Z}$; $0,5 \notin \mathbb{Z}$;
$0,7 \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$; $2+i \notin \mathbb{R}$; $1-i \in \mathbb{C}$.
2) Pentru mulţimile A, B, C, D, E, X, Y *definite anterior, putem prezenta următoarele exemple:* $25 \in X$, $-7,25 \in Y$, $8 \in B$, $7 \notin C$, $a, b \in D$, 6 *şi* $12 \in A$, $11 \notin A$.

Definiţia 3.1.1 *Vom spune că mulţimile A şi B sunt egale şi vom scrie $A = B$, dacă ele sunt formate din aceleaşi elemente, adică $A = B \iff \forall z(z \in A \leftrightarrow z \in B)$, unde prin semnul $\leftrightarrow$ vom înţelege echivalenţa $F \leftrightarrow G = (F \to G)\&(G \to F)$, introdusă în capitolul I, (”$\to$” este simbolul implicaţiei).*

Potrivit definiţiei egalităţii mulţimilor rezultă că din egalitatea a două mulţimi ($A = B$) şi din faptul că elementul a aparţine uneia din mulţimi (de exemplu, $a \in A$), putem deduce că a aparţine şi celeilalte mulţimi ($a \in B$).

Observăm că pentru a demonstra egalitatea mulţimilor A şi B, este suficient să arătăm că sunt adevărate propoziţiile:

$\forall z(z \in A \to z \in B)$ şi $\forall z(z \in B \to z \in A)$.

Negaţia propoziţiei $A = B$ o vom nota $A \neq B$, adică $A \neq B \iff \neg(A = B)$ sau $A = B \iff \neg(A \neq B)$.

Remarca 3.1.1 *Egalitatea mulţimilor are următoarele proprietăţi:*

a) Reflexivitate: pentru oricare mulţime A avem: $A = A$,

b) Simetrie: pentru orice mulţimi A şi B avem: $A = B \implies B = A$,

c) Tranzitivitate: pentru orice mulţimi A, B şi C avem: $(A = B)\&(B = C) \implies (A = C)$.

Definiţia 3.1.2 *Mulţimea care nu conţine niciun element se numeşte mulţime vidă şi se notează $\varnothing$.*

Mulţimea vidă este caracterizată prin următorul fapt: $\forall x(x \notin \varnothing)$. Mulţimea vidă este acceptată ca mulţime din motive asemănătoare cu cele ale acceptării lui $'0'$ printre numere.

3.2 Relaţia de incluziune a mulţimilor

Definiţia 3.2.1 *Vom spune că mulţimea A este inclusă în mulţimea B şi scriem $A \subset B$, dacă fiecare element al mulţimii A este un element şi al mulţimii B, adică: $A \subset B \iff \forall x(x \in A \to x \in B)$, unde prin "$\subset$" vom nota simbolul ,,relaţiei de incluziune".*

$A \subset B$ se mai exprimă şi astfel: ,,A este o submulţime a lui B" sau ,,B include A" şi se mai notează: $B \supset A$.

În unele cazuri, pentru a reprezenta intuitiv noţiunile susnumite, vom utiliza desene în care reprezentăm mulţimile printr-o linie închisă. De exemplu, faptul că mulţimea A este inclusă în mulţimea B poate fi reprezentat prin *Figura 3.2.1*.

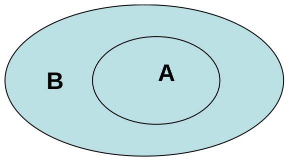


Figura 3.2.1: Incluziunea mulţimilor

Observăm că: $A = B \iff (A \subset B)\&(B \subset A)$.

Dacă mulţimea A *nu se include* în mulţimea B, vom scrie $A \not\subset B$, adică: $A \not\subset B \iff \neg(A \subset B)$.

Pentru a demonstra că mulţimea A nu este inclusă în B, este suficient să arătăm existenţa unui element al mulţimii A care nu este element al mulţimii B, adică:
$A \not\subset B \iff \exists z((z \in A)\&(z \notin B))$.

Exemplul 3.2.1 *1) Pentru exemplificare, menţionăm următoarele afirmaţii adevărate:* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $\mathbb{C} \not\subset \mathbb{R}$.

2) Pentru mulţimile A, B, C, D, E, X, Y *definite anterior în paragraful 3.1, putem prezenta următoarele exemple:* $A \subset \mathbb{N}$, $B \subset \mathbb{N}$, $C \subset \mathbb{Z}$, $E \not\subset \mathbb{N}$, $E \subset \mathbb{R}$, $D \not\subset \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{N}$, $Y \subset \mathbb{R}$, $A \not\subset \mathbb{C}$, $A \not\subset B$, $C \not\subset A$.

Exerciţii: 1) Determinaţi care dintre următoarele relaţii de incluziune sunt adevărate: $E \not\subset \mathbb{C}$, $B \subset \mathbb{R}$, $D \not\subset \mathbb{Q}$, $X \subset \mathbb{C}$, $Y \not\subset \mathbb{Z}$, $E \subset \mathbb{N}$, $E \not\subset \mathbb{Q}$, $B \not\subset \mathbb{N}$, $C \not\subset \mathbb{R}$. 2) Determinaţi alte relaţii de incluziune între mulţimile A, B, C, D, E, X, Y definite anterior în paragraful 3.1 şi mulţimile $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$.

Remarca 3.2.1 *Relaţia de incluziune are proprietăţile:*

a) Reflexivitate: $A \subset A$,

b) Antisimetrie: pentru orice mulţimi A *şi* B *avem:* $(A \subset B)\&(B \subset A) => A = B$,

c) Tranzitivitate: pentru orice mulţimi A, B *şi* C *avem:* $(A \subset B)\&(B \subset C) => (A \subset C)$.

Teorema 3.2.1 *Mulţimea vidă* $\varnothing$ *este inclusă în orice mulţime.*
Demonstraţie. Fie A o mulţime arbitrară. Presupunem contrariul, adică $\varnothing \not\subset A$. De aici rezultă ca există un astfel de element $x \in \varnothing$, încât $x \notin A$, însă aceasta este imposibil, deoarece mulţimea vidă nu conţine elemente. Contradicţia obţinută ne arată că presupunerea afirmaţiei $\varnothing \not\subset A$ nu poate avea loc, adică $\varnothing \subset A$, c.t.d. $\square$

Definiţia 3.2.2 *Vom spune că mulţimea A este strict inclusă în mulţimea* B *şi vom scrie* $A \subsetneq B$, *adică* $A \subset B$ *şi* $A \neq B$, *prin urmare* $A \subsetneq B \iff (A \subset B)\&(A \neq B)$.

Exemplul 3.2.2 *1) Următoarele relaţii de incluziune strictă sunt adevărate:* $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$.
2) Pentru mulţimile A, B, C, D, E, X, Y *definite în paragraful*

3.1 sunt adevărate următoarele relaţii de incluziune: $A \subsetneq \mathbb{N}$, $A \subsetneq \mathbb{Z}$, $B \subsetneq \mathbb{N}$, $C \subsetneq \mathbb{Z}$, $E \subsetneq \mathbb{R}$, $Y \subsetneq \mathbb{R}$, $X \subsetneq \mathbb{Z}$, $X \subsetneq \mathbb{N}$.

Remarca 3.2.2 *Incluziunea strictă are proprietăţile:*

a) Ireflexivitate: $\neg(A \subsetneq A)$,

b) Asimetrie: pentru orice mulţimi A *şi* B *avem:* $(A \subsetneq B) \implies \neg(B \subsetneq A)$,

c) Tranzitivitate: pentru orice mulţimi A, B *şi* C *avem:* $(A \subsetneq B) \& (B \subsetneq C) \implies (A \subsetneq C)$.

Observăm că ireflexivitatea nu este negaţia reflexivităţii şi asimetria nu este negaţia simetriei.

3.3 Reuniunea mulţimilor

Definiţia 3.3.1 *Vom numi reuniunea mulţimilor* A *şi* B *şi o notăm prin* $A \cup B$, *mulţimea care conţine numai acele elemente, care aparţin cel puţin uneia dintre mulţimile* A *sau* B, *adică* $x \in A \cup B \iff (x \in A) \vee (x \in B)$. *(Fig. 3.3.1)*

Exemplul 3.3.1 *Următoarele exemple ilustrează reuniunea mulţimilor:* $\{1, 3, 5\} \cup \{1, 3, 9\} = \{1, 3, 5, 9\}$, $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

Reuniunea a două mulţimi include fiecare dintre termenii reuniunii, adică $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$.

Dacă o mulţime include ambii termeni ai reuniunii, atunci ea include şi reuniunea, adică: $(C \supset A) \& (C \supset B) \implies C \supset (A \cup B)$.

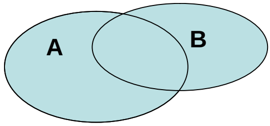


Figura 3.3.1: Reuniunea mulţimilor

Exemplul 3.3.2 *Următoarele exemple ilustrează reuniunea mulţimilor* $(A, B, C, D, E, X, Y$ *definite în paragraful 3.1):*
$A \cup B = \{$*toate numerele naturale pozitive divizibile la 3 sau la 2*$\}$, $B \cup C = \{$*toate numerele naturale pozitive pare şi toate numerele negative impare din intervalul de la* -10 *la* $-2\}$;
$D \cup E = \{a, b, e, f, g, h, 2; 5.7; -3, 25; \frac{100}{3}; \sqrt{9}; 2 - i; \sqrt{-1}\}$;
$X \cup Y = \{x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{R} : 10 < x \leq 100, -10.5 \leq y < \infty\}$;
$A \cup X = \{a \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{N} : a \vdots 3, 10 < x \leq 100\}$;

Exerciţii: Determinaţi reuniunea mulţimilor $(A, B, C, D, E, X, Y$ sunt definite în paragraful 3.1): $B \cup X$, $C \cup Y$, $D \cup C$, $C \cup E$, $A \cup E$; $(A \cup X) \cup D$, $(C \cup Y) \cup \mathbb{N}$, $(D \cup \mathbb{Z}) \cup C$, $(C \cup \mathbb{N}) \cup E$, $(A \cup E) \cup \mathbb{R}$, $(B \cup D) \cup \mathbb{C}$.

Teorema 3.3.1 *Reuniunea este comutativă, adică:*
$(A \cup B) = (B \cup A)$.

Demonstraţie. Vom demonstra pentru început că:
$(A \cup B) \subset (B \cup A)$.

Într-adevăr, fie $x \in (A \cup B)$, adică $(x \in A) \vee (x \in B)$. Dar de aici rezultă că $(x \in B) \vee (x \in A)$. Prin urmare, $x \in (B \cup A)$.

Astfel, obţinem $(A \cup B) \subset (B \cup A)$. Schimbând rolurile lui A şi B, vom obţine că $(B \cup A) \subset (A \cup B)$. În virtutea unei observaţii anterioare, obţinem $(A \cup B) = (B \cup A)$, c.t.d. $\square$

În mod analogic, poate fi demonstrată şi următoarea teoremă.

Teorema 3.3.2 *Reuniunea este asociativă, adică:* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Se observă că reuniunea este idempotentă, adică $A \cup A = A$.

Teorema 3.3.3 *Mulţimea vidă are rol de element neutru faţă de reuniune, adică:* $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$.

Demonstraţie. E suficient să demonstrăm numai egalitatea $A \cup \varnothing = A$, deoarece pentru a deduce cealaltă egalitate putem aplica comutativitatea reuniunii. Este evidentă incluziunea $A \subset (A \cup \varnothing)$, de unde rezultă că este suficient să demonstrăm că $(A \cup \varnothing) \subset A$. Fie $x \in A \cup \varnothing$, adică $(x \in A) \vee (x \in \varnothing)$. Deoarece $(x \notin \varnothing)$, adică $\neg(x \in \varnothing)$, atunci rezultă că $(x \in A)$, adică $(A \cup \varnothing) \subset A$, c.t.d. $\square$

Teorema 3.3.4 $A \subset B \iff (A \cup B) = B$.

Demonstraţie. Să demonstrăm mai întâi suficienţa. Şi anume, dacă $(A \cup B) = B \implies A \subset B$. Pe de altă parte, $A \subset (A \cup B)$. Deci presupunând $A \cup B = B$, deducem că $A \subset B$.

Să demonstrăm necesitatea, adică reciproc să presupunem $A \subset B$. Deoarece $B \subset B$, atunci din presupunere rezultă $(A \cup B) \subset B$. Pe de altă parte, avem $B \subset (A \cup B)$. Prin urmare, obţinem $(A \cup B) = B$, c.t.d. $\square$

Uşor se poate arăta că reuniunea este *izotonă* (crescătoare după ambele argumente), adică:

$$(A \subset B)\&(C \subset D) \implies (A \cup C) \subset (B \cup D).$$

3.4 Intersecţia mulţimilor

Definiţia 3.4.1 *Vom numi intersecţia mulţimilor A şi B şi o notăm prin $A \cap B$, mulţimea care conţine numai acele elemente care aparţin atât lui A cât şi lui B, adică:* $x \in (A \cap B) \iff (x \in A)\&(x \in B)$.

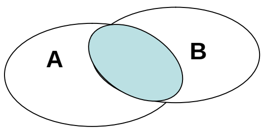


Figura 3.4.1: Intersecţia mulţimilor

Exemplul 3.4.1 *Următoarele exemple ilustrează intersecţia mulţimilor:* $\{1, 3, 5\} \cap \{1, 3, 7\} = \{1, 3\}$,
$\{a, b, c, d, f, g\} \cap \{b, c, e, f, g, h, i\} = \{b, c, f, g, \}$;
$\mathbb{R} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$, $\mathbb{C} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$.

Exemplul 3.4.2 *Pentru mulţimile A, B, C, D, E, X, Y definite în paragraful 3.1, sunt adevărate următoarele exemple care ilustrează intersecţia mulţimilor: $B \cap C = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $D \cap E = \varnothing$, $A \cap E = \varnothing$, $B \cap E = \{2, 100/5\}$, $A \cap E = \{3\}$.*

Exerciţii: Considerăm mulţimile A, B, C, D, E, X, Y definite în paragraful 3.1. Determinaţi intersecţia următoarelor mulţimi: 1) $\mathbb{R} \cap \mathbb{C}$, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{C}$, $\mathbb{C} \cap \mathbb{Z}$, $\mathbb{R} \cap \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{N}$. 2) $E \cap C$, $A \cap X$, $D \cap X$, $B \cap Y$, $Y \cap C$, $X \cap Y$, $B \cap X$, $D \cap Y$, $D \cap A$. 3) $A \cap \mathbb{R}$, $B \cap \mathbb{Z}$, $C \cap \mathbb{Q}$, $D \cap \mathbb{N}$, $E \cap \mathbb{C}$, $E \cap \mathbb{Q}$, $X \cap \mathbb{R}$, $Y \cap \mathbb{Q}$, $Y \cap \mathbb{Z}$, $D \cap \mathbb{C}$, $D \cap \mathbb{Q}$, $B \cap \mathbb{N}$, $Y \cap \mathbb{N}$; $D \cap (\mathbb{C} \cap E)$, $(D \cap \mathbb{Q}) \cap E$, $(B \cap \mathbb{N}) \cap A$, $Y \cap (A \cap \mathbb{N})$.

Teorema 3.4.1 *Intersecţia a două mulţimi este inclusă în fiecare din aceste mulţimi, adică: $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$.*

Demonstraţie. Fie $x \in A \cap B \implies (x \in A) \& (x \in B)$. Deoarece $(x \in A) \& (x \in B)$, rezultă că $(x \in A)$ şi analog $(x \in B)$. Prin urmare, $(A \cap B) \subset A$ şi $(A \cap B) \subset B$, c.t.d. $\square$

Teorema 3.4.2 *Dacă o mulţime este inclusă în fiecare termen al intersecţiei, atunci ea este inclusă în intersecţie, adică $(C \subset A) \& (C \subset B) \implies C \subset (A \cap B)$.*

Demonstraţie. Fie $a \in C$. Deoarece $(C \subset A)$, rezultă că $a \in A$. Deoarece $(C \subset B)$, rezultă că $a \in B$. Din faptul că $a \in A$ şi $a \in B$, rezultă că $a \in (A \cap B)$, adică $C \subset (A \cap B)$, c.t.d. $\square$

Este uşor de observat că demonstraţiile nu diferă mult de cele referitoare la reuniune, fapt pentru care vom enunţa o serie de proprietăţi, a căror demonstraţie este recomandată în calitate de exerciţii practice.

Proprietăţi ale intersecţiei:

1) Intersecţia este *comutativă*, *asociativă* şi *idempotentă*, adică: $A \cap B = B \cap A$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cap A) = A$.

2) Mulţimea vidă are rol de anulator faţă de intersecţie, adică: $A \cap \varnothing = \varnothing \cap A = \varnothing$.

Analog cu teorema 3.3.4 din paragraful precedent poate fi demonstrată şi următoarea teoremă.

Teorema 3.4.3 $(A \subset B) \iff (A \cap B) = A.$

Intersecţia este *izotonă după ambele argumente*, adică: $(A \subset B) \& (C \subset D) \implies (A \cap C) \subset (B \cap D)$.

Teorema 3.4.4 *Au loc următoarele proprietăţi de absorbţie: a)* $A \cap (A \cup B) = A$, *b)* $A \cup (A \cap B) = A$.

Demonstraţie. Vom demonstra numai a doua egalitate (b). Deoarece $(A \cap B) \subset A$, atunci aplicând proprietăţile reuniunii, vom obţine $(A \cap B) \cup A = A$, din care obţinem egalitatea cerută, folosind comutativitatea reuniunii.

Folosind egalităţile din ultima teoremă, prin comutativitate se pot obţine şi următoarele proprietăţi de absorbţie: $(A \cup B) \cap A = A$, $(A \cap B) \cup A = A$, $A \cap (B \cup A) = A$, $A \cup (B \cap A) = A$, $(B \cup A) \cap A = A$, $(B \cap A) \cup A = A$. $\square$

Teorema 3.4.5 *Intersecţia este distributivă faţă de reuniune, adică:*

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

b) $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$.

Demonstraţie. Vom demonstra numai prima egalitate, deoarece a doua se obţine din aceasta prin comutativitate. Vom începe cu demonstrarea incluziunii: $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.

Deoarece din reflexivitatea incluziunii avem $A \subset A$, iar din proprietatea reuniunii avem $B \subset (B \cup C)$, atunci folosind proprietatea de izotonie a intersecţiei, rezultă că $(A \cap B) \subset A \cap (B \cup C)$. În mod analog se arată că $(A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$. Pentru a obţine incluziunea cerută, este suficient să aplicăm una din proprietăţile reuniunii ultimelor două incluziuni.

Să arătăm ca are loc şi incluziunea inversă, adică:

$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Fie $x \in A \cap (B \cup C)$, adică $x \in A$ şi $x \in (B \cup C)$. Însă $x \in (B \cup C)$ este echivalent cu $(x \in B)$ sau $(x \in C)$. Dacă $x \in B$, deoarece avem şi $x \in A$, rezultă că $x \in (A \cap B)$, deci $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Dacă $x \in C$, deoarece avem şi $x \in A$, rezultă că $x \in (A \cap C)$ şi deci: $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. $\square$

Teorema 3.4.6 *Reuniunea este distributivă faţă de intersecţie, adică:*

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

b) $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$.

Demonstraţie. Vom demonstra numai prima egalitate (a). Aplicând teorema precedentă (intersecţia este distributivă faţă de reuniune) în membrul drept al egalităţii (a) obţinem:
$(A \cup B) \cap (A \cup C) = [(A \cup B) \cap A] \cup [(A \cup B) \cap C]$.

Folosind în prima paranteză absorbţia şi în a doua distributivitatea intersecţiei faţă de reuniune, obţinem:
$(A \cup B) \cap (A \cap C) = A \cup [(A \cap C) \cup (B \cap C)]$.

Folosind asociativitatea reuniunii şi apoi absorbţia, obţinem
$(A \cup B) \cap (A \cap C) = [A \cup (A \cap C)] \cup (B \cap C) = A \cup (B \cap C)$, c.t.d. $\square$

Definiţia 3.4.2 *Mulţimile A şi B se numesc disjuncte, dacă $(A \cap B) = \varnothing$. Cu alte cuvinte, două mulţimi se numesc disjuncte, dacă ele nu au niciun element comun.*

3.5 Diferenţa mulţimilor

Definiţia 3.5.1 *Vom numi diferenţa mulţimilor A şi B şi o notăm $A \setminus B$ sau $A - B$, mulţimea care conţine acele elemente ale lui A care nu se găsesc în mulţimea B, adică:*
$x \in (A \setminus B) \iff (x \in A) \& (x \notin B)$.

Mulţimea haşurată din *figura 3.5.1* reprezintă mulţimea $(A \setminus B)$, adică diferenţa mulţimilor.

Remarca 3.5.1 *Din definiţia diferenţei a două mulţimi rezultă următoarea proprietate: $A \setminus B = A \setminus (B \cap A)$. Acest fapt poate fi remarcat şi în figura care reprezintă diferenţa mulţimilor*

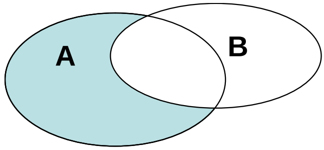


Figura 3.5.1: Diferenţa mulţimilor

$A \setminus B$. Această proprietate uneori poate fi utilă pentru a determina mai simplu mulţimea rezultat.

Exemplul 3.5.1 *Următoarele exemple ilustrează diferenţa mulţimilor: 1) $\{1,3,7,9\} \setminus \{1,3,6,10\} = \{7,9\}$;*
2) $\{2,5,6,1/6,\sqrt{2}\} \setminus \{1,2,3,4\} = \{5,6,1/6,\sqrt{2}\}$;
3) $\{a,b,c,e,f,h,i\} \setminus \{b,c,d,e,g,h\} = \{a,f,i\}$.
4) Pentru mulţimile A,B,C,D,E,X,Y definite în paragraful 3.1, putem prezenta următoarele exemple de diferenţă a mulţimilor: $B \setminus C = B \setminus (B \cap C) = B$ (deoarece $(B \cap C) = \varnothing$), $A \setminus C = A$, $C \setminus A = C$ (deoarece $(A \cap C) = \varnothing$).
5) $X \setminus Y = \varnothing$ (deoarece $X \subset Y$). Precizăm că:
$X = \{x \in \mathbb{N} : 10 < x \leq 100\} = \{11,12,13,...,99,100\}$,
$Y = \{y \in \mathbb{R} : -10.5 \leq y < \infty\}$, deci mulţimea Y conţine toate elementele din mulţimea X.
6) $D \setminus A = D$ (deoarece $(A \cap D) = \varnothing$); $E \setminus D = E$ (deoarece $(E \cap D) = \varnothing$).
7) Considerăm mulţimea A definită în paragraful 3.1, $\mathbb{N} \setminus A = \{x \in \mathbb{N} : x \not\vdots 3\}$ este mulţimea tuturor numerelor naturale care nu sunt divizibile la 3.

Exerciţii: Să se determine diferenţa mulţimilor:
1) $E \setminus B$, $E \setminus A$, $X \setminus E$, $E \setminus Y$, $D \setminus Y$, $D \setminus B$, $C \setminus D$, $A \setminus X$,

$X \setminus A$, $Y \setminus \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \setminus X$, $X \setminus \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \setminus C$, $\mathbb{N} \setminus D$, $\mathbb{N} \setminus E$, $\mathbb{N} \setminus X$, $\mathbb{N} \setminus B$, $B \setminus \mathbb{N}$, $A \setminus \mathbb{Z}$, $A \setminus \mathbb{R}$, $E \setminus \mathbb{Z}$, $E \setminus \mathbb{R}$, $E \setminus \mathbb{Q}$, $E \setminus \mathbb{C}$, $\mathbb{C} \setminus E$, $\mathbb{Q} \setminus E$.
2) $(\mathbb{N} \setminus X) \setminus Y$, $(\mathbb{R} \setminus C) \setminus B$, $(E \setminus \mathbb{C}) \setminus D$, $(D \setminus \mathbb{R}) \setminus A$, $(\mathbb{R} \setminus D) \setminus B$, $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} \setminus B)$, $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} \setminus A)$, $\mathbb{N} \setminus (\mathbb{R} \setminus B)$, $\mathbb{N} \setminus (\mathbb{R} \setminus A)$.

Lema 3.5.1 *Diferenţa a două mulţimi este inclusă în prima mulţime, adică:* $A \setminus B \subset A$.

Teorema 3.5.1 $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.
Demonstraţie. Deoarece $(B \setminus A) \subset B$, din proprietatea de izotomie a reuniunii rezultă că $A \cup (B \setminus A) \subset (A \cup B)$.

Reciproc, fie $x \in (A \cup B)$, adică $x \in A$ sau $x \in B$. Dacă $x \in A$, atunci $x \in A \cup (B \setminus A)$. Dacă $x \notin A$, atunci $x \in B$, deci $x \in (B \setminus A)$. Prin urmare, şi în acest caz $x \in A \cup (B \setminus A)$. Deoarece în ambele cazuri am obţinut $x \in A \cup (B \setminus A)$, rezultă că $(A \cup B) \subset (A \cup (B \setminus A))$, c.t.d. $\square$

Teorema demonstrată ne arată că diferenţa mulţimilor nu este operaţia inversă reuniunii mulţimilor.

Acest exemplu, ca şi proprietatea de idempotenţă a reuniunii şi intersecţiei, ne arată că proprietăţile operaţiilor cu mulţimi sunt diferite de proprietăţile operaţiilor cu numere.

Teorema 3.5.2 $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B = A \setminus (B \cup C)$.
Demonstraţie. Pentru început, vom forma următorul şir de echivalenţe: $x \in (A \setminus B) \setminus C \iff (x \in (A \setminus B))\&(x \notin C) \iff (x \in A)\&(x \notin B)\&(x \notin C) \iff$
$(x \in A)\&\neg(x \in (B \cup C)) \iff x \in A \setminus (B \cup C)$.

Din acest şir şi tranzitivitatea echivalenţei rezultă că: $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

Din ultima egalitate şi comutativitatea reuniunii rezultă că: $(A \setminus C) \setminus B = A \setminus (C \cup B) = A \setminus (B \cup C)$, c.t.d. $\square$

Teorema 3.5.3 *Pentru orice mulţimi A, B şi C, au loc următoarele egalităţi:*
a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Demonstraţie. Vom demonstra numai prima egalitate, formând ca şi în teorema precedentă următorul şir de echivalenţe:
$x \in A \setminus (B \cup C) \iff (x \in A) \& \neg(x \in B \cup C) \iff (x \in A) \& \neg((x \in B) \vee (x \in C)) \iff (x \in A) \& [\neg(x \in B) \& \neg(x \in C)] \iff [(x \in A) \& (x \notin B)] \& [(x \in A) \& (x \notin C)] \iff x \in (A \setminus B) \& (x \in (A \setminus C)) \iff x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, c.t.d. $\square$

Teorema 3.5.4 *Pentru orice mulţimi A, B şi C, au loc următoarele egalităţi:*
a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,
b) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

Demonstraţie. Vom demonstra numai prima egalitate, prin următorul şir de echivalenţe: $x \in (A \cup B) \setminus C \iff x \in (A \cup B)$ şi $x \notin C \iff [(x \in A) \vee (x \in B)] \& (x \notin C) \iff [(x \in A) \& (x \notin C)] \vee [(x \in B) \& (x \notin C)] \iff (x \in (A \setminus C)) \vee (x \in (B \setminus C)) \iff x \in [(A \setminus C) \cup (B \setminus C)]$, c.t.d. $\square$

Remarca 3.5.2 *Pentru orice mulţime A au loc următoarele egalităţi: a)* $A \setminus \varnothing = A$, *b)* $\varnothing \setminus A = \varnothing$, *c)* $A \setminus A = \varnothing$.

3.6 Diferenţa simetrică a mulţimilor

Definiţia 3.6.1 *Vom numi diferenţa simetrică a mulţimilor A şi B, mulţimea $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Mulţimea haşurată din Figura 3.6.1 reprezintă diferenţa simetrică, adică mulţimea $A \triangle B$.*

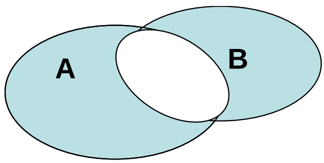


Figura 3.6.1: Diferenţa simetrică a mulţimilor

Remarca 3.6.1 *Din definiţia diferenţei simetrice a două mulţimi rezultă următoarea proprietate: $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Acest fapt poate fi remarcat şi în figura care reprezintă diferenţa simetrică a mulţimilor $A \triangle B$. Această proprietate uneori ne poate ajuta a determina mai simplu diferenţa simetrică a mulţimilor date.*

Exemplul 3.6.1 *Următoarele exemple ilustrează diferenţa simetrică a mulţimilor:*
1) $\{1, 3, 7, 9\} \triangle \{1, 3, 6, 10\} = \{6, 7, 9, 10\}$;
2)$\{2, 5, 6, 1/6, \sqrt{2}\} \triangle \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 1/6, \sqrt{2}\}$;
3)$\{a, b, c, e, f, h, i\} \triangle \{b, c, d, e, g, h\} = \{a, d, f, g, i\}$.

4) Pentru mulţimile A, B, C, D, E, X, Y definite în paragraful 3.1, putem prezenta următoarele exemple de diferenţă simetrică a mulţimilor:
$A \triangle C = (A \cup C) \setminus (A \cap C) = (A \cup C) \setminus \varnothing = (A \cup C)$, $B \triangle C = (B \cup C)$ *(deoarece* $(B \cap C) = \varnothing$*).* $A \triangle D = (A \cup D)$, $A \triangle E = (A \cup E) \setminus \{|\sqrt{9}|\}$, $B \triangle E = (B \cup E) \setminus \{2, 100/5\}$.

Exerciţii: Să se determine diferenţa simetrică a mulţimilor: $D \triangle E$, $A \triangle B$, $C \triangle B$, $X \triangle Y$, $A \triangle Y$, $B \triangle Y$, $B \triangle X$, $A \triangle X$, $C \triangle Y$, $Y \triangle E$, $A \triangle \mathbb{N}$, $E \triangle \mathbb{Q}$, $E \triangle \mathbb{C}$, $X \triangle \mathbb{N}$, $D \triangle \mathbb{C}$, $Y \triangle \mathbb{Z}$, $B \triangle \mathbb{N}$, $(A \triangle C) \triangle B$, $C \triangle (A \triangle B)$, $(\mathbb{Z} \triangle C) \triangle A$, $\mathbb{R} \triangle (D \triangle A)$, $(E \triangle \mathbb{Z}) \triangle B$, $(E \triangle \mathbb{C}) \triangle A$, $(E \triangle \mathbb{R}) \triangle B$.

Lema 3.6.1 $x \in (A \triangle B) \iff$
$[(x \in A) \& (x \notin B)] \vee [(x \in B) \& (x \notin A)]$.

Demonstraţie. Din definiţia anterioară avem:
$x \in (A \triangle B) \iff x \in [(A \setminus B) \cup (B \setminus A)]$. Iar din definiţia reuniunii obţinem $x \in [(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] \iff x \in [(A \setminus B) \vee x \in (B \setminus A)]$. Folosind definiţia diferenţei, obţinem:
$x \in (A \setminus B) \iff (x \in A) \& (x \notin B)$,
$x \in (B \setminus A) \iff (x \in B) \& (x \notin A)$.

Aplicând teoremele anterioare la ultimele două expresii, deducem echivalenţa din lemă, c.t.d. $\square$

Lema demonstrată ne arată că un element aparţine diferenţei simetrice a două mulţimi, dacă şi numai dacă acel element aparţine uneia dintre mulţimi, fără să aparţină şi celeilalte mulţimi.

Teorema 3.6.1 *Diferenţa simetrică este comutativă, adică* $A \triangle B = B \triangle A$.

Demonstraţie. $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \triangle A$. $\square$

Teorema 3.6.2 *Diferenţa simetrică este asociativă, adică* $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

Demonstraţie. Deoarece $(A \triangle B) \triangle C = [(A \triangle B) \setminus C] \cup [C \setminus (A \triangle B)]$, rezultă că $x \in (A \triangle B) \triangle C$, dacă şi numai dacă $x \in (A \triangle B) \setminus C$ sau $x \in C \setminus (A \triangle B)$.

Să analizăm în parte cele două cazuri:

I. Observăm că $x \in (A \triangle B) \setminus C$, dacă şi numai dacă $x \in (A \triangle B)$ şi $x \notin C$. Ţinând cont de lema precedentă, rezultă că $x \in (A \triangle B) \setminus C$, dacă şi numai dacă:
a) $x \in A$ şi $x \notin B$ şi $x \notin C$, sau
b) $x \in B$ şi $x \notin A$ şi $x \notin C$.

II. Observăm că $x \in C \setminus (A \triangle B)$, dacă şi numai dacă $x \in C$ şi $x \notin A \triangle B$. Folosind lema, rezultă că $x \in C \setminus (A \triangle B)$, dacă şi numai dacă
c) $x \in C$ şi $x \in A$ şi $x \in B$ sau
d) $x \in C$ şi $x \notin A$ şi $x \notin B$.

Deci $x \in (A \triangle B) \triangle C$, dacă şi numai dacă x aparţine tuturor celor trei mulţimi, sau x aparţine uneia dintre cele trei mulţimi, fără însă să aparţină şi celorlalte două.

Un raţionament similar ne arată că $x \in A \triangle (B \triangle C)$, dacă şi numai dacă x aparţine tuturor celor trei mulţimi sau x aparţine uneia dintre cele trei mulţimi, fără însă să aparţină şi celorlalte două. Prin urmare, $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$, c.t.d. $\square$

Teorema 3.6.3 *Mulţimea vidă este element neutru faţă de diferenţa simetrică, adică* $A \triangle \varnothing = \varnothing \triangle A = A$.

Demonstraţie. $A \triangle \varnothing = (A \setminus \varnothing) \cup (\varnothing \setminus A) = A \cup \varnothing = A$, c.t.d. $\square$

Teorema 3.6.4 $A \triangle A = \varnothing$.

Demonstraţie. $A \triangle A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$. $\square$

Teorema 3.6.5 *Intersecţia este distributivă faţa de diferenţa simetrică, adică au loc egalităţile:*
a) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$,
b) $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$.

Demonstraţie. Vom demonstra numai prima egalitate, deoarece a doua rezultă din prima folosind comutativitatea. Din definiţie rezultă că $(A \cap B) \triangle (A \cap C) = [(A \cap B) \setminus (A \cap C)] \cup [(A \cap C) \setminus (A \cap B)]$.

Folosind teorema 3.5.3 din paragraful precedent, obţinem în continuare: $(A \cap B) \triangle (A \cap C) = \{[(A \cap B) \setminus A] \cup [(A \cap B) \setminus C]\} \cup \{[(A \cap C) \setminus A] \cup [(A \cap C) \setminus B]\}$.

Deoarece $(A \cap B) \subset A$ şi $(A \cap C) \subset A$, rezultă că $(A \cap B) \setminus A = \varnothing$ şi $(A \cap C) \setminus C = \varnothing$. Prin urmare, obţinem $(A \cap B) \triangle (A \cap C) = [(A \cap B) \setminus C] \cup [(A \cap C) \setminus B]$.

Observând că $[(A \cap B) \setminus C] = [A \cap (B \setminus C)]$, rezultă $(A \cap B) \triangle (A \cap C) = [A \cap (B \setminus C)] \cup [A \cap (C \setminus B)]$.

Folosind distributivitatea intersecţiei faţă de reuniune, obţinem $(A \cap B) \triangle (A \cap C) = A \cap [(B \setminus C) \cup (C \setminus B)] = A \cap (B \triangle C)$, c.t.d. $\square$

3.7 Complementara mulţimii

Definiţia 3.7.1 *Fie A o mulţime arbitrară. Mulţimea tuturor submulţimilor X incluse în A se numeşte mulţimea submulţimilor (părţilor lui A) şi se notează $\mathbf{P}(A)$.*

Exemplul 3.7.1 *Considerăm mulţimea $A = \{a, b, c\}$.*
Mulţimea tuturor submulţimilor din mulţimea A este:
$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.
Dacă $A = \{0, 1, 2\}$, atunci:
$P(A) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$.

Exerciţii: Considerăm mulţimile A, B, C, D, E, X, Y definite în paragraful 3.1. Să se determine mulţimea tuturor submulţimilor din mulţimile: C, D, E, X, $X \cap E$, $B \cap A$, $X \cap B$, $B \cap E$, $D \cap E$, $X \cap A$, $Y \cap E$, $Y \cap D$, $Y \cap C$.

Definiţia 3.7.2 *Dacă $B \subset T$, atunci mulţimea $T \setminus B$ se numeşte complementara lui B faţă de T şi se notează $\mathbf{C_T}B$.*

Exemplul 3.7.2 *Considerăm mulţimea $A = \{a, b, c\}$. Complementara mulţimii A în raport cu mulţimea literelor alfabetului latin $T = \{a, b, c, d, ..., x, y, z\}$ este $\mathbf{C_T}A =$ $= \{d, e, f, ..., x, y, z\}$. Dacă B este mulţimea tuturor numerelor pozitive pare, atunci complementara mulţimii B în raport cu mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ este $\mathbf{C}_{\mathbb{N}}B = \{1, 3, 5, 7, ...\}$, adica mulţimea tuturor numerelor pozitive impare.*

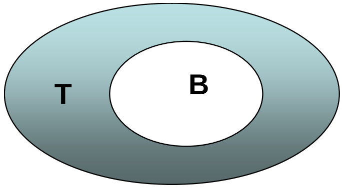


Figura 3.7.1: Complementara mulţimii

Mulţimea haşurată din *Figura 3.7.1* reprezintă complementara lui B în raport cu T.

În cazul particular în care mulţimea T se subînţelege, vom nota prescurtat $\mathbf{C}B$ în loc de $\mathbf{C_T}B$.

Exerciţii: Considerăm mulţimile A, B, C, D, E, X, Y definite în paragraful 3.1. Să se determine complementara mulţimilor indicate în raport cu mulţimile precizate $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ sau $T = \{a, b, c, d, ..., x, y, z\}$: $\mathbf{C_T}D$, $\mathbf{C}_\mathbb{N}X$, $\mathbf{C}_\mathbb{N}A$, $\mathbf{C}_\mathbb{Z}C$, $\mathbf{C}_\mathbb{C}E$, $\mathbf{C}_\mathbb{R}D$, $\mathbf{C}_\mathbb{R}Y$, $\mathbf{C}_\mathbb{R}C$, $\mathbf{C}_\mathbb{Q}B$.

Lema 3.7.1 *Dacă $B \in \mathbf{P}(T)$ şi $x \in T$, atunci $x \in \mathbf{C}B \iff x \notin B$.*

Demonstraţie. $x \in \mathbf{C}B \iff (x \in T)\&(x \notin B) \iff x \notin B$, c.t.d. $\square$

Teorema 3.7.1 *Pentru orice mulţimi A şi B, sunt juste formulele lui De Morgan:*

a) $\mathbf{C}(A \cup B) = \mathbf{C}A \cap \mathbf{C}B$,

b) $\mathbf{C}(A \cap B) = \mathbf{C}A \cup \mathbf{C}B$.

Demonstraţie. Vom utiliza *teorema 3.5.3* din secţiunea 3.5.

$\mathbf{C}(A \cup B) = T \setminus (A \cup B) = (T \setminus A) \cap (T \setminus B) = \mathbf{C}A \cap \mathbf{C}B$.

$\mathbf{C}(A \cap B) = T \setminus (A \cap B) = (T \setminus A) \cup (T \setminus B) = \mathbf{C}A \cup \mathbf{C}B$, c.t.d. $\square$

Teorema 3.7.2 *Complementara este antitonă (descrescătoare), adică:* $A \subset B \implies \mathbf{C}A \supset \mathbf{C}B$.

Demonstraţie. $A \subset B \implies A = A \cap B \implies$
$\mathbf{C}A = \mathbf{C}(A \cap B) = \mathbf{C}A \cup \mathbf{C}B \implies \mathbf{C}A \supset \mathbf{C}B$, c.t.d. □

Teorema 3.7.3 *Complementara este involutivă, adică:* $\mathbf{CC}A = A$.

Demonstraţie. Presupunem că $x \in T$ şi utilizând lema precedentă (3.7.1) obţinem $x \in \mathbf{CC}A \iff x \notin \mathbf{C}A \iff x \in A$, c.t.d. □

Teorema 3.7.4 *Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

a) $A \cap \mathbf{C}A = \varnothing$ *şi* $A \cup \mathbf{C}A = T$,

b) $(A \cap B = \varnothing)\&(A \cup B = T) \implies B = \mathbf{C}A$.

Demonstraţie. Prima afirmaţie este trivială. Vom demonstra a doua afirmaţie (b). Fie $x \in T$. Dacă $x \in B$, atunci din $A \cap B = \varnothing$ deducem că $x \notin A$. Dacă $x \notin B$, atunci din $A \cup B = T$ deducem că $x \in A$. Deci $x \in B \iff x \notin A$, adică $B = \mathbf{C}A$, c.t.d. □

3.8 Produsul cartezian al mulţimilor

Definiţia 3.8.1 *Se numeşte produsul cartezian al mulţimilor* A *şi* B *şi se notează* $A \times B$ *mulţimea tuturor perechilor ordonate* (a, b)*, unde* $a \in A$ *şi* $b \in B$*, adică*
$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

Noţiunea de *pereche ordonată* o acceptăm ca un cuplu de două obiecte împreună cu o ordine dată între aceste elemente. Vom admite că $(a, b) = (a', b') \iff (a = a')\&(b = b')$.

Observăm că $(a, b) \neq \{a, b\}$, deoarece presupunând $a \neq b$ avem: $(a, b) \neq (b, a)$, în timp ce $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Exemplul 3.8.1 *1) Considerăm mulţimile* $\{a, b, c\}$ *şi* $\{0, 1, 2\}$. *Atunci produsul cartezian al acestor mulţimi este:*
$\{a, b, c\} \times \{0, 1\} = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 0), (c, 1)\}$.
2) Produsul cartezian al mulţimilor $\{a, b, c\} \times \mathbb{N}$ *este:*
$\{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2), (a, 3), (b, 3), (c, 3), ...\}$ *şi este o mulţime infinită, pentru că mulţimea* $\mathbb{N}$ *este o mulţime infinită.*
3) Considerăm mulţimile A, B, C, D, E, X, Y *definite în paragraful 3.1. Vom determina produsul cartezian al mulţimilor:*
$D \times E = \{(x, y) : x \in D, y \in E\} =$
$= \{(a, 2), (a, 5.7), (a, -3.25), (a, 100/5), ..., (g, \sqrt{-1}), (g, \sqrt{9}), (g, 2 - i)\}$.

Exerciţii: Considerăm mulţimile A, B, C, D, E, X, Y definite în paragraful 3.1. Să se determine produsul cartezian al mulţimilor: 1) $X \times D = \{11, 12, 13, ..., 99, 100\} \times \{a, b, e, f, g\} = \{(x, y) : x \in X, y \in D\}$. 2) $C \times D = \{-9, -7, -5, -3\} \times \{a, b, e, f, g\}$. 3) $D \times \mathbb{N}$, $D \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times C$, $C \times \mathbb{Z}$, $X \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \times X$. 4) $(D \times C) \times \{0, 1\}$, $(\{0, 1\} \times C) \times D$, $(D \times \{0, 1\}) \times E$.

Se poate de observat că produsul cartezian *nu este asociativ şi nici comutativ*, adică: $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$ şi $(A \times B) \neq (B \times A)$.

Teorema 3.8.1 *Produsul cartezian este izoton, adică*
$(A \subset B) \& (C \subset D) \implies (A \times C) \subset (B \times D)$.
Demonstraţie. Fie $x \in A \times C$, adică $x = (a, c)$, unde $a \in A$ şi $c \in C$. Deoarece $A \subset B$, rezultă că $a \in B$, deoarece $C \subset D$, rezultă că $c \in D$. Prin urmare, $x \in B \times D$, c.t.d. $\square$

Teorema 3.8.2 *Produsul cartezian este distributiv faţă de reuniune, adică au loc egalităţile:*
a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
b) $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$.

Demonstraţie. Vom demonstra numai prima egalitate.
Deoarece $A \subset A \cup B$ şi $B \subset A \cup B$, din teorema 3.8.1 deducem că: $(A \times C) \subset (A \cup B) \times C$ şi $(B \times C) \subset (A \cup B) \times C$.
Dar dacă o mulţime include ambii termeni ai reuniunii, atunci ea include şi reuniunea. Prin urmare, obţinem în continuare $(A \times C) \cup (B \times C) \subset (A \cup B) \times C$.

Reciproc, fie $x \in (A \cup B) \times C$, adică $x = (a, c)$, unde $a \in (A \cup B)$ şi $c \in C$. Dar $a \in (A \cup B)$ este echivalent cu $(a \in A)$ sau $(a \in B)$. Dacă $(a \in A)$, atunci $a \in A \times C$, deci $x \in (A \times C) \cup (B \times C)$. Dacă $(a \in B)$, atunci $x \in (B \times C)$, deci $x \in (A \times C) \cup (B \times C)$, c.t.d. $\square$

Teorema 3.8.3 *Produsul cartezian este distributiv faţă de intersecţie, adică au loc egalităţile:*
a) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,
b) $C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B)$.
Demonstraţie. Vom demonstra numai prima egalitate. Deoarece intersecţia este inclusă în ambii săi termeni, raţionând ca şi în teorema anterioară, obţinem:
$(A \cap B) \times C \subset (A \times C) \cap (B \times C)$.

Reciproc, fie $x \in (A \times C) \cap (B \times C)$, adică $x \in (A \times C)$ şi $x \in (B \times C)$. Deoarece $x \in (A \times C)$, rezultă că $x = (a, c)$, unde

$a \in A$ şi $c \in C$. Deoarece $x \in (B \times C)$, rezultă că $x = (b, c')$, unde $b \in B$ şi $c' \in C$. Însă dacă $x = (a, c) = (b, c')$, atunci $a = b$ şi $c' = c$, adică $a \in B$ şi deci $a \in A \cap B$. Prin urmare, $x = (a, c) \in (A \cap B) \times C$, c.t.d. $\square$

Teorema 3.8.4 *Produsul cartezian este distributiv faţă de diferenţă, adică au loc egalităţile:*
a) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$,
b) $C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B)$.

Demonstraţie. Vom demonstra numai prima egalitate. Deoarece $A \setminus B \subset A$, rezultă că $((A \setminus B) \times C) \subset (A \times C)$.

Să arătăm că dacă $x \in ((A \setminus B) \times C)$, atunci $x \notin (B \times C)$. Presupunem contrariul, adică $x \in (B \times C)$ şi deci $x = (b, c)$, unde $b \in B$ şi $c \in C$.

Deoarece $x \in (A \setminus B) \times C$, rezultă că $x = (a, c')$, unde $a \in A \setminus B$, iar $c' \in C$. Dar egalitatea $(b, c) = (a, c')$ implică: $b = a$ şi $c = c'$, deci $b \in A \setminus B$, ceea ce contrazice $b \in B$. Deci dacă $x \in (A \setminus B) \times C$, atunci $x \notin B \times C$ şi ţinând cont şi de incluziunea de mai sus rezultă că $((A \setminus B) \times C) \subset ((A \times C) \setminus (B \times C))$.

Reciproc, fie $x \in ((A \times C) \setminus (B \times C))$, adică $x \in (A \times C)$ şi $x \notin (B \times C)$. Deoarece $x \in (A \times C)$, rezultă că $x = (a, c)$, unde $a \in A$ şi $c \in C$. Vom demonstra că $a \notin B$. Presupunem contrariul că $a \in B$, de unde rezultă că $x = (a, c) \in (B \times C)$, ceea ce contrazice $x \notin B \times C$. Deoarece $a \in A$ şi $a \notin B$, rezultă că $a \in (A \setminus B)$, adică $x = (a, c) \in (A \setminus B) \times C$. $\square$

3.9 Mulţimi finite şi operaţii cu ele

Definiţia 3.9.1 *Vom spune că mulţimea A este finită, dacă există un număr natural $n \in N$ şi o funcţie bijectivă $f : \{1, 2, ..., n\} \to A$. Altfel spus, o mulţime finită este echivalentă cu o mulţime de forma: $\{1, 2, ..., n\}$. Numărul n de elemente din mulţimea finită A se numeşte cardinalul mulţimii A şi se va nota: $|A| = n$.*

Exemplul 3.9.1 *Considerăm mulţimile A, B, C, D, E, X, Y definite în paragraful 3.1. Pentru mulţimile finite C, D, E, X, putem determina cardinalul lor: $|C| = 4$, $|D| = 6$, $|E| = 7$, $|X| = 90$.*

Exerciţiu: Considerăm mulţimile A, B, C, D, E, X, Y definite în paragraful 3.1. Să se determine cardinalul mulţimilor: $D \cup E$, $A \cap E$, $X \cup D$, $B \cap E$, $Y \cap X$, $A \cap X$, $B \cap X$, $B \cap C$, $(D \cup E) \cup C$, $X \cup (D \cap E)$, $(B \cap C) \setminus D$, $(B \cup C) \cap X$, $(A \cap D) \cup X$.

Lema 3.9.1 *Dacă A este o mulţime finită şi există două funcţii bijective:*
$f : \{1, 2, ..., m\} \to A$ şi $g : \{1, 2, ..., n\} \to A$, atunci $m = n$.

De aici rezultă că, fiind dată o mulţime finită A, există un singur număr natural n, astfel încât A să fie echivalentă cu mulţimea $\{1, 2, ..., n\}$. În acest caz, vom spune că mulţimea A are n elemente. Prin definiţie, mulţimea vidă ($\varnothing$) are zero elemente.

Lema 3.9.2 *Dacă A şi B sunt mulţimi finite, atunci ele sunt echivalente, dacă şi numai dacă au acelaşi număr de elemente.*

Teorema 3.9.1 *Dacă A este o mulţime finită cu n elemente şi B este o mulţime finită cu m elemente, iar $A \cap B = \varnothing$, atunci $A \cup B$ este o mulţime finită cu $m + n$ elemente.*

Demonstraţie. Fie $f : \{1, 2, ..., n\} \to A$ şi $g : \{1, 2, ..., m\} \to$ $\to B$ funcţiile bijective din teoremă. Construim o nouă funcţie $h : \{1, 2, ..., n, n + 1, ..., n + m\} \to (A \cup B)$ după următoarea schemă:

$$h(i) = \begin{cases} f(i), & \text{dacă } 1 \leq i \leq n, \\ g(i - n), & \text{dacă } n + 1 \leq i \leq m + n. \end{cases}$$

Funcţia h este bijectivă. Într-adevăr, fie i, j două numere naturale disjuncte cuprinse între 1 şi $n+m$. Dacă $1 \leq i, j \leq n$, atunci $h(i) \neq h(j)$, pentru că $h(i) = f(i)$, $h(j) = f(j)$ şi $f(i) \neq f(j)$. În mod analogic se demonstrează că $h(i) \neq h(j)$, dacă $n + 1 \leq i, j \leq n + m$. Dacă însă unul dintre cele două numere, de exemplu, i este cuprins între 1 şi n, adică $1 \leq i \leq n$ şi $n+1 \leq j \leq n+m$, atunci $h(i) = f(i)$, iar $h(j) = g(i-n) \in$ B, deci $h(i) \neq h(j)$, căci $A \cap B = \varnothing$. Surjectivitatea funcţiei h rezultă din surjectivitatea funcţiilor f şi g. $\square$

În mod analogic pot fi demonstrate şi următoarele teoreme.

Teorema 3.9.2 *Fie A o mulţime finită cu n elemente şi B o mulţime finită cu m elemente. Mulţimea $A \times B$ este finită şi conţine $n \cdot m$ elemente.*

Teorema 3.9.3 *Dacă A este o mulţime finită cu n elemente şi $B \subset A$, $B \neq A$ este o submulţime a sa, atunci B este finită şi are m elemente, unde $m < n$.*

Teorema 3.9.4 *Dacă A este o mulţime finită, atunci ea nu este echivalentă cu nicio submulţime proprie a sa.*

3.10 Mulţimi infinite

Definiţia 3.10.1 *O mulţime A care nu este finită se numeşte mulţime infinită.*

Există în lumea înconjurătoare suficiente exemple de mulţimi finite, dar există totodată şi mulţimi care nu sunt finite. De exemplu, mulţimea astrelor din Universul Astral este infinită. Dar nu este atât de simplu să demonstrăm acest lucru, folosind doar noţiunile pe care le cunoaştem deja şi fără a recurge la teorii profunde de Astronomie, Cosmogonie, Fizică şi alte ştiinţe. Matematica însă ne pune la dispoziţie exemple numeroase de mulţimi infinite şi cu toate că aceste mulţimi sunt creaţii abstracte ale minţii omeneşti, ele intervin în foarte multe probleme practice. În plus, este destul de uşor să demonstrăm, în mod riguros, că acestea sunt într-adevăr mulţimi infinite. Vom da un exemplu concret.

Teorema 3.10.1 *Mulţimea numerelor naturale* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ *este infinită.*

Demonstraţie. Vom demonstra prin inducţie matematică afirmaţia că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ nu există nicio funcţie bijectivă f, astfel încât $f : \{1, 2, \ldots, n-1, n\} \to \mathbb{N}$.

Într-adevăr, dacă $n = 1$, atunci funcţia $f : \{1\} \to \mathbb{N}$ nu este bijectivă, deoarece evident nu poate fi surjectivă. Admitem că pentru numărul natural $n-1$ nu există o astfel de funcţie bijectivă f, încât $f : \{1, 2, \ldots, n-2, n-1\} \to \mathbb{N}$.

Presupunem contrariul, că pentru numărul n ar exista o astfel de funcţie bijectivă f, încât $f : \{1, 2, \ldots, n-1, n\} \to \mathbb{N}$. Vom nota imaginea lui n prin f cu $f(n) = k \in \mathbb{N}$.

Construim o nouă funcţie $g : [\mathbb{N} \setminus \{k\}] \to \mathbb{N}$, definită astfel:

$$g(i) = \begin{cases} i, & \text{dacă } i < k, \\ i-1, & \text{dacă } i > k. \end{cases}$$

În mod intuitiv, funcţia g stabileşte corespondenţa din desenul următor:

$$g : \left| \begin{array}{ccccccccc} 0, & 1, & 2,\ldots & k-1, & k+1, & k+2,\ldots & n, & n+1, & n+2,\ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0, & 1, & 2,\ldots & k-1, & k, & k+1,\ldots & n-1, & n, & n+1,\ldots \end{array} \right.$$

Evident că funcţia g este bijectivă. Dacă notăm cu f' următoarea funcţie $f' : \{1, 2, \ldots, n-1\} \to \mathbb{N} \setminus \{k\}$, unde $f'(i) = f(i)$ pentru orice $1 \leq i \leq n-1$, atunci se observă că funcţia f' este bijectivă. Vom cerceta compunerea funcţiilor f' şi g, adică funcţia compusă $g \circ f' : \{1, 2, \ldots, n-1\} \to \mathbb{N}$, care este la fel bijectivă. Aşadar, am construit o bijecţie de la mulţimea $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ la mulţimea $\mathbb{N}$, fapt care contrazice ipoteza de inducţie asupra numărului $n-1$. În concluzie, mulţimea $\mathbb{N}$ nu este finită, pentru că în caz contrar ar exista un număr natural n şi o bijecţie respectivă $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{N}$, c.t.d. $\square$

Această teoremă ne arată metoda de construire a unei varietăţi de mulţimi infinite, precum şi spre demonstrarea faptului că anumite mulţimi întâlnite în matematică sunt infinite.

3.11 Mulţimi numărabile

Definiţia 3.11.1 *Se numeşte mulţime numărabilă mulţimea echivalentă cu mulţimea numerelor naturale* $\mathbb{N}$*.*

Astfel, o mulţime A este numărabilă, dacă şi numai dacă există aşa o funcţie bijectivă $f : \mathbb{N} \to A$.
Mulţimea $\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ este numărabilă. Într-adevăr, există o funcţie bijectivă $s : \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\} \to \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ definită prin $s(n) = n+1$. Astfel de funcţie se numeşte *funcţia succesor.*

Deoarece această funcţie este bijectivă, atunci funcţia $s^n = s \circ s \circ \ldots \circ s$, obţinută prin compunerea succesivă de n ori a lui s este o bijecţie între mulţimile $\mathbb{N}$ şi $\{n, n+1, n+2, \ldots\}$, adică: $s^n : \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\} \to \{n, n+1, \ldots, n+k, \ldots\}$.

Prin urmare, orice mulţime de forma $\{n, n+1, n+2, \ldots, n+k, \ldots\}$ formată din numerele naturale mai mari decât n este numărabilă.

Din cele menţionate mai sus, dacă mulţimea A este numărabilă, atunci există aşa o funcţie bijectivă f definită prin $f : \{1, 2, \ldots, n, \ldots\} \to A$. Aceasta înseamnă că pentru orice element $a \in A$ există un unic număr natural $i, i \geq 1$, astfel încât $a = f(i)$. În continuare, vom nota elementul dat a prin a_i, marcând în acest fel, prin indicele i proprietatea lui a de a fi egal cu valoarea funcţiei f în i. Deoarece f este surjectivă, atunci toate elementele mulţimii A sunt de forma a_i, unde $i = 1, 2, \ldots$, astfel încât elementele mulţimii A se pot aranja sub forma unui şir infinit $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, iar mulţimea A poate fi scrisă astfel: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$.

Pe locul n în şir se află elementul $a_n = f(n)$, iar elementele care sunt pe locuri distincte sunt diferite pentru că $a_i = a_j$ implică $f(i) = f(j)$ şi, prin urmare, $i = j$.

Teorema 3.11.1 *Mulţimea* $\mathbb{N}'$ *a tuturor numerelor naturale pare este numărabilă.*

Demonstraţie. Din condiţiile teoremei avem:

$\mathbb{N}' = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$.

Stabilim funcţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$, care determină asocierea $n \to f(n) = 2n$. Uşor se observă că această funcţie este bijectivă şi, prin urmare, mulţimea $\mathbb{N}'$ este numărabilă, c.t.d.$\square$

Din această teoremă rezultă ca mulţimea $\mathbb{N}'$ este strict inclusă în $\mathbb{N}$ şi, totodată, este echivalentă cu $\mathbb{N}$. Din materialul precedent am observat că acest lucru nu se întâmplă cu mulţimile finite. Exemplul de mai sus al mulţimii numerelor naturale pare, care este echivalentă cu mulţimea tuturor numerelor naturale, reprezintă una din curiozităţile mulţimilor infinite; curiozitate care vine în oarecare măsură în contradicţie cu experienţa practică în materie de numărare.

Pentru a ilustra această curiozitate, ne putem imagina un exemplu. Să presupunem că avem un hotel, ale cărui camere formează o mulţime numărabilă. Atunci ele pot fi numerotate cu cifre în următoarea ordine: $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, unde C_i denotă camera situată pe locul i din numerotarea aleasă. Presupunem că fiecare cameră are un singur loc (pat) şi că toate camerele sunt ocupate. Vom nota cu L_i locatarul din camera C_i. Fie că un turist T vine la acest hotel infinit şi doreşte să fie cazat. Poate el fi cazat fără a da afară pe nici unul din vecinii locatari ai hotelului? Evident că dacă hotelul ar avea un număr finit de camere, acest lucru nu este posibil. Dar direcţia acestui hotel infinit găseşte următoarea soluţie: noului turist venit T i se repartizează camera C_1, iar locatarul L_1 din camera C_1 trece în camera C_2, locatarul L_2 din camera C_2 trece în camera C_3 ş.a.m.d.

Obţinem în final următoarea repartiţie pe camere, care asigură fiecărui locatar un loc bine determinat:

$$\begin{array}{llllll}
C_1, & C_2, & C_3,\ldots & C_n, & C_{n+1},\ldots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
T & L_1, & L_2,\ldots & L_{n-1}, & L_n,\ldots
\end{array}$$

Să presupunem în continuare că la hotel nu vine un singur turist, ci o mulţime numărabilă de turişti: $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$.

Cum pot fi ei cazaţi, astfel încât şi vecinii locatari să rămână în hotel? Acest lucru se poate face după următoarea schemă:

$$\begin{array}{llllll} C_1, & C_2, & C_3 & C_4, \ldots & C_{2n-1}, & C_{2n}, \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ T_1, & L_1, & T_2, & L_2, \ldots & T_n, & L_n, \ldots \end{array}$$

Astfel, obţinem că locatarul L_n din camera C_n va trece în camera cu numărul dublu C_{2n}, în timp ce turistul T_n va ocupa camera C_{2n-1}. Prin urmare, problema a fost rezolvată în felul următor: locatarii vechi ai hotelului vor ocupa numai camere cu număr par, iar turiştii nou-veniţi vor ocupa camerele cu număr impar. $\square$

Teorema 3.11.2 *Mulţimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ este numărabilă.*

Demonstraţie. Considerăm funcţia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, care asociază fiecărui număr întreg $z \in \mathbb{Z}$ numărul natural $f(z) \in \mathbb{N}$, unde:

$$f(z) = \begin{cases} 2z, & \text{dacă } z \geq 0 \\ 2|z| - 1 = -1 - 2z, & \text{dacă } z < 0. \end{cases}$$

Să demonstrăm că această funcţie f este bijectivă.

Într-adevăr, fie $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ şi $z_1 \neq z_2$. Dacă $z_1 \geq 0$ şi $z_2 < 0$, atunci $f(z_1)$ este par, iar $f(z_2)$ este impar şi deci $f(z_1) \neq f(z_2)$. Dacă $z_1 \geq 0$ şi $z_2 \geq 0$, atunci $f(z_1) \neq f(z_2)$, deoarece $2z_1 \neq 2z_2$. Dacă $z_1 < 0$, $z_2 < 0$, atunci $-1 - 2z_1 \neq -1 - 2z_2$, adică $f(z_1) \neq f(z_2)$.

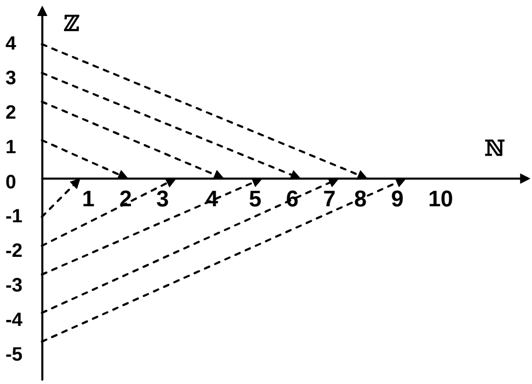


Figura 3.11.1: Corespondenţa stabilită între $\mathbb{N}$ şi $\mathbb{Z}$

Să demonstrăm că f este şi surjectivă. Într-adevăr, dacă $n \in \mathbb{N}$ şi $n = 2m$, atunci $n = f(m)$, iar dacă $n = 2m - 1$, atunci $n = f(-m)$, unde $-m < 0$, deoarece $m > 0$. Imaginea intuitivă a corespondenţei stabilite de funcţia f este cea din Figura 3.11.1. $\square$

3.12 Numere cardinale. Operaţii cu numere cardinale

Definiţia 3.12.1 *Mulţimile A şi B sunt echivalente (cardinal echivalente), dacă există o funcţie bijectivă $f : A \to B$. Vom scrie pe scurt că mulţimea A este cardinal echivalentă cu mulţimea B astfel: $A \sim B$.*

Se observă că echivalenţa cardinală este o relaţie de echivalenţă între mulţimi.

Definiţia 3.12.2 *Vom numi număr cardinal o clasă de echivalenţă de mulţimi cardinal echivalente.*

Din definiţia claselor de echivalenţă, rezultă că un număr cardinal α constă împreunarea într-o singură clasă a tuturor mulţimilor echivalente cu o mulţime dată A. Pentru a pune în evidenţă că α este cardinalul definit de mulţimea A, vom nota cardinalul α prin $|A|$. Elementele lui $\alpha = |A|$ sunt deci mulţimile echivalente cu A. Dacă A este mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$, atunci toate mulţimile echivalente cu A conţin n elemente, adică sunt caracterizate de numărul n al elementelor sale. Din aceste considerente, spunem că noţiunea de număr cardinal generalizează noţiunea de număr din aritmetică prin trecerea de la cazul mulţimilor finite la mulţimi oarecare.

Definiţia 3.12.3 *Clasa de echivalenţă a tuturor mulţimilor numărabile se numeşte numărul cardinal* $\aleph_0$ *(se citeşte ,,alef”).*

Definiţia 3.12.4 *Numărul cardinal* α *se numeşte infinit, dacă reprezintă clasa de echivalenţă a unei mulţimi infinite.*

Din proprietăţile relaţiei de echivalenţă şi din faptul că o mulţime finită nu este echivalentă cu o mulţime infinită, rezultă că toate mulţimile care definesc numărul cardinal α din definiţia precedentă sunt mulţimi infinite.

Numerele cardinale, ca o generalizare a numerelor naturale din aritmetică, pot da naştere unei aritmetici a numerelor cardinale, care să generalizeze aritmetica obişnuită a numerelor naturale.

În această nouă aritmetică ne vom întâlni cu câteva din curiozităţile de comportament ale numerelor cardinale infinite. Vom începe cu definirea operaţiilor aritmetice între numerele cardinale.

Definiţia 3.12.5 *Fie α şi β două numere cardinale, iar A şi B două mulţimi care aparţin lui α şi respectiv lui β, astfel încât $A \cap B = \varnothing$. Vom numi suma cardinalelor α şi β numărul cardinal $\alpha + \beta$, care reprezintă clasa mulţimilor echivalente cu mulţimea $A \cup B$.*

Se poate observa că ipoteza $A \cap B = \varnothing$ se poate realiza întotdeauna, deoarece dacă $A \cap B \neq \varnothing$, atunci putem construi mulţimile $A' = A \times \{0\}$ şi $B' = B \times \{1\}$, care sunt disjuncte ($A' \cap B' = \varnothing$).

În plus, avem $A \sim A'$ şi $B \sim B'$, deci vom considera $\alpha + \beta$ ca fiind clasa de echivalenţă a mulţimii $A' \cup B'$. Această ipoteză este necesară pentru a ne asigura că, cel puţin în cazul când α şi β sunt cardinale finite, atunci suma lor $\alpha + \beta$ coincide cu suma numerelor naturale, care reprezintă numărul de elemente din A şi B.

Definiţia 3.12.6 *Fie α şi β două numere cardinale, astfel încât $\alpha = |A|$ şi $\beta = |B|$. Vom numi produsul numerelor cardinale α şi β numărul cardinal $\alpha \cdot \beta$ care reprezintă clasa de echivalenţă a mulţimilor echivalente cu mulţimea $A \times B$, adică $ab = |A \times B|$.*

Definiţia 3.12.7 *Se numeşte puterea β a cardinalului α cardinalul α^β care este format de clasa de echivalenţă a mulţimilor echivalente cu mulţimea A^B (unde A^B este mulţimea funcţiilor definite pe B cu valori în A).*

Teorema 3.12.1 *Fie α şi β două numere cardinale, iar A şi A' două mulţimi care aparţin lui α, B şi B' două mulţimi care aparţin lui β.*
(i) Dacă $A \cap B = \varnothing$ şi $A' \cap B' = \varnothing$, atunci $A \cup B \sim A' \cup B'$.
(ii) $A \times B \sim A' \times B'$.
(iii) $A^B \sim {A'}^{B'}$.
Demonstraţie.

(i) Fie $f : A \to A'$ şi $g : B \to B'$ două funcţii bijective. Vom defini o nouă funcţie $h : A \cup B \to A' \cup B'$ în modul următor:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in A, \\ g(x), & \text{dacă } x \in B. \end{cases}$$

Să arătăm că h este injectivă. Într-adevăr, fie $x, x' \in A \cup B$ astfel încât $h(x) = h(x')$. Nu putem avea $x \in A$ şi $x' \in B$, deoarece ar rezulta $h(x) = f(x) \in A'$ şi $h(x) = h(x') = g(x') \in B'$, ceea ce contrazice ipoteza $A' \cap B' = \varnothing$. În mod analogic se observă că nu putem avea $x \in B$ şi $x' \in A$. Dacă $x, x' \in A$, atunci $f(x) = h(x) = h(x') = f(x')$ şi deoarece f este injectivă, rezultă că $x = x'$. La fel, se observă că dacă $x, x' \in B$, atunci $x = x'$.

Să arătăm în continuare că h este surjectivă. Fie $y \in A' \cup B'$, adică $y \in A'$ sau $y \in B'$. Astfel, în primul caz surjectivitatea lui f implică existenţa unui element $x \in A$, astfel încât $y = f(x) = h(x)$. Iar în al doilea caz există elementul $x \in B$, astfel încât $y = g(x) = h(x)$.

(ii) Fie $f : A \to A'$ şi $g : B \to B'$ două funcţii bijective. Atunci funcţia $f \times g : A \times B \to A' \times B'$ pe care o definim astfel: $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$, $(x \in A, y \in B)$ este o funcţie bijectivă. Într-adevăr, fie $(x_1, y_1) \in A \times B$, $(x_2, y_2) \in A \times B$ două perechi, astfel încât $(f \times g)(x_1, y_1) = (f \times g)(x_2, y_2)$. Atunci $(f(x_1), g(y_1)) = (f(x_2), g(y_2))$ implică $f(x_1) = f(x_2)$ şi $g(x_1) = g(x_2)$. Iar din injectivitatea funcţiilor f şi g avem $x_1 = x_2$ şi $y_1 = y_2$.

Surjectivitatea funcţiei $f \times g$ rezultă din surjectivitatea funcţiilor f şi g. Într-adevăr, pentru orice pereche $(x', y') \in A' \times B'$ există $x \in A$ şi $y \in B$, astfel încât $f(x) = x'$ şi $g(y) = y'$, adică: $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y)) = (x', y')$.

(iii)Fie $f : A \to A'$ şi $g : B \to B'$ funcţiile bijective care realizează echivalenţa acestor mulţimi. Definim funcţia $\varphi : A^B \to A'^{B'}$, care fiecărei funcţii $u : B \to A$ îi asociază funcţia $f \circ u \circ g^{-1} : B' \to A'$. Vom demonstra că această funcţie φ este bijectivă. Într-adevăr, să presupunem că $\varphi(u) = \varphi(v)$, unde $u, v \in A^B$. În virtutea definiţiei date, aceasta înseamnă că $f \circ u \circ g^{-1} = f \circ v \circ g^{-1}$. La ultima egalitate adăugăm compoziţia cu f^{-1} din stânga şi cu g din dreapta, după care obţinem $(f^{-1} \circ f) \circ u \circ (g^{-1} \circ g) = (f^{-1} \circ f) \circ v \circ (g^{-1} \circ g)$, de unde rezultă $u = v$. Prin urmare, φ este injectivă.

Să demonstrăm că φ este şi surjectivă. Fie $v \in A'^{B'}$ o funcţie arbitrară de la B' la A'. Observăm că funcţia $v' = f^{-1} \circ v \circ g \in A^B$ şi deci vom avea:

$\varphi(v') = f \circ (f^{-1} \circ v \circ g) \circ g^{-1} = v$.

Astfel, obţinem că φ este surjectivă, astfel încât ajungem la concluzia că în ipotezele noastre mulţimile A^B şi ${A'}^{B'}$ sunt echivalente. Cu aceasta, teorema 3.12.1 este demonstrată. $\square$

3.13 Proprietăţile operaţiilor cu numere cardinale

Fie m, n, p trei numere cardinale şi M, N, P trei mulţimi care aparţin claselor de mulţimi echivalente m, n, p, respectiv. Operaţiile definite anterior au următoarele proprietăţi, pe care le vom descrie în următoarele leme.

Lema 3.13.1 *Adunarea este comutativă, adică:*
$m + n = n + m$.

Demonstraţie. Într-adevăr, mulţimile M şi N pot fi alese disjuncte şi atunci adunarea $m + n$ e definită de mulţimile echivalente cu $M \cup N$, iar $n + m$ e definită de mulţimile echivalente cu $N \cup M$. Pe de altă parte, $M \cup N = N \cup M$. Prin urmare, aceste mulţimi sunt echivalente şi definesc numere cardinale egale: $m + n = n + m$, c.t.d. $\square$

Lema 3.13.2 *Adunarea este asociativă, adică:*
$(m + n) + p = m + (n + p)$.

Demonstraţie. Într-adevăr, putem presupune că $M \cap N = \varnothing$ şi $N \cap P = \varnothing$. Atunci lema 3.13.2 rezultă din faptul cunoscut: $(M \cup N) \cup P = M \cup (N \cup P)$. $\square$

Lema 3.13.3 *Înmulţirea este comutativă, adică* $m \cdot n = n \cdot m$.
Demonstraţie. Într-adevăr, această proprietate rezultă din faptul că produsul cartezian $M \times N$ este echivalent cu $N \times M$, după cum s-a arătat mai sus. $\square$

Lema 3.13.4 *Înmulţirea este asociativă, adică:*
$m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$.
Demonstraţie. Într-adevăr, deoarece mulţimea $M \times (N \times P)$ este echivalentă cu mulţimea $(M \times N) \times P$, atunci ele definesc numere cardinale egale. $\square$

Lema 3.13.5 *Înmulţirea este distributivă, faţă de adunare, adică:* $m \cdot (n + p) = (m \cdot n) + (m \cdot p)$.
Demonstraţie. Într-adevăr, pentru a demonstra, vom presupune că $N \cap P = \varnothing$. Atunci $n + p$ este cardinalul definit de mulţimile echivalente cu $N \cup P$, iar $m \cdot (n + p)$ este definit de $M \times (N \cup P)$. Pe de altă parte, mulţimea $M \times (N \cup P) = (M \times N) \cup (M \times P)$ şi în plus $(M \times N) \cap (M \times P) = \varnothing$. Atunci cardinalul mulţimii $(M \times N) \cup (M \times P)$ este egal cu cardinalul mulţimii $(M \times N)$ adunat cu cardinalul mulţimii $(M \times P)$, adică $(m \cdot n) + (m \cdot p)$, c.t.d. $\square$

Lema 3.13.6 *Exponenţierea unei puteri de cardinale se face prin înmulţirea puterilor şi păstrarea bazei, adică:* $(m^n)^p = m^{n \cdot p}$, *unde* $(m^n)^p$ *este numărul cardinal definit ca fiind clasa* *de echivalenţă a mulţimii* $(M^N)^P$*, iar* $m^{n \cdot p}$ *este definit de mulţimea* $M^{N \times P}$*.*

Demonstraţie. Într-adevăr, vom arăta că aceste două mulţimi sunt echivalente cu ajutorul funcţiei $\varphi : (M^N)^P \to M^{N \times P}$. Această funcţie φ asociază fiecărei funcţii $f : P \to M^N$ funcţia $\varphi_f \in M^{N \times P}$, care este definită, la rândul său, în felul următor: dacă $(x, y) \in N \times P$, atunci $\varphi_f(x, y) = f(y)(x)$. $\square$

Lema 3.13.7 *Înmulţirea puterilor unui număr cardinal se face prin adunarea exponenţilor şi păstrarea bazei, adică:* $m^n \cdot m^p = m^{n+p}$*.*

Demonstraţie. Într-adevăr, fie $N \cap P = \varnothing$. Atunci $m^n \cdot m^p$ este clasa de echivalenţă a mulţimii $M^N \times M^P$, iar m^{n+p} este clasa de echivalenţă a mulţimii $M^{N \cup P}$. Din cele demonstrate mai sus, se poate observa că aceste două mulţimi sunt echivalente, adică $m^n \cdot m^p = m^{n+p}$, c.t.d. $\square$

Lema 3.13.8 *Exponenţierea unui produs coincide cu produsul puterilor factorilor, adică:* $(m \cdot n)^p = m^p \cdot n^p$*.*

Demonstraţie. Într-adevăr, fie M, N, P trei mulţimi aparţinând numerelor cardinale m, n şi p, respectiv. Din materialul expus anterior se poate de demonstrat că există aşa o funcţie $\varphi : (M \times N)^P \to M^P \times N^P$, definită prin $\varphi(f) = (P_M \circ f, P_N \circ f)$, unde P_M şi P_N sunt funcţiile proiecţii ale mulţimii $M \times N$. Deoarece această funcţie φ este o bijecţie, atunci cardinalul $(m \cdot n)^p$ al mulţimii $(M \times N)^P$ coincide cu cardinalul $m^p \cdot n^p$ al mulţimii $M^P \times N^P$, c.t.d. $\square$

3.14 Compararea numerelor cardinale. Mulţimi alternative numărabile

Problema principală care ne-a adus la construirea numerelor cardinale pornea de la necesitatea de a compara mulţimile din punctul de vedere al numărului lor de elemente. Mulţimile finite sunt cardinal echivalente, dacă ele au acelaşi număr de elemente. Pentru aceste mulţimi finite echivalente, numărul cardinal corespunzător lor este un număr natural şi noi putem să comparăm numerele naturale după mărimea lor.

Vom introduce acum o ordonare după mărime între numerele cardinale oarecare, care în cazul numerelor cardinale finite coincide cu ordonarea după mărime a numerelor naturale.

Definiţia 3.14.1 *Vom spune că numărul cardinal α este mai mic decât numărul cardinal β şi vom nota $\alpha \leq \beta$, dacă există mulţimile $A \in \alpha$ şi $B \in \beta$, astfel încât mulţimea A este cardinal echivalentă cu o submulţime $B' \subset B$.*

Din definiţie se observă că această relaţie este o relaţie de ordine între numerele cardinale, deoarece ea este atât reflexivă (adică $\alpha \leq \alpha$), cât şi tranzitivă (adică $\alpha \leq \beta$ şi $\beta \leq \gamma \implies \alpha \leq \gamma$).

Proprietatea de antisimetrie a relaţiei de inegalitate între numerele cardinale face obiectul unei teoreme celebre numită ,,Teorema lui Cantor şi Bernstein", pe care o enunţăm în continuare.

Teorema 3.14.1 *(Cantor-Bernstein). Dacă pentru numerele cardinale α şi β avem $\alpha \leq \beta$ şi $\beta \leq \alpha$, atunci $\alpha = \beta$.*

Demonstraţia acestei teoreme este mai dificilă şi de aceea ne vom limita numai la aplicarea ei, deoarece ne va permite să obţinem multe rezultate necesare.

Teorema 3.14.2 *(Dedekind). $\aleph_0$ este cel mai mic număr cardinal infinit, adică dacă α este un număr cardinal infinit oarecare, atunci $\aleph_0 \leq \alpha$.*

Demonstraţie. Fie A o mulţime infinită de cardinal α. Vom demonstra că există aşa o funcţie injectivă $\varphi : \mathbb{N} \to \alpha$ şi atunci vom avea $\mathbb{N} \sim \varphi(\mathbb{N}) = A'$, iar A' este o submulţime a mulţimii A. Construcţia funcţiei φ o vom face prin inducţie după $n \in \mathbb{N}$. Deoarece $A \neq \varnothing$, atunci există $a_0 \in A$. Considerăm $\varphi(0) = a_0$ şi atunci mulţimea $A_1 = A \setminus \{a_0\}$ nu este vidă, adică conţine cel puţin un element a_1.

Vom considera prin definiţie $\varphi(1) = a_1$. Astfel, obţinem că mulţimea $A_2 = A \setminus \{a_0, a_1\}$ nu este vidă. Ea conţine un element a_2 şi definim $\varphi(2) = a_2$. Continuând acest proces, presupunem că am construit imaginea $\varphi(k) = a_k$ pentru toate numerele $k \leq n$. Atunci mulţimea $\{a_0, a_1, a_2, ..., a_n\}$ este finită şi inclusă în mulţimea A. Deoarece mulţimea A este infinită, atunci mulţimea $A \setminus \{a_0, a_1, a_2, ..., a_n\}$ este nevidă (în caz contrar, am avea $A = \{a_0, a_1, a_2, ..., a_n\}$, ceea ce contrazice faptul că A este infinită). Astfel, există un aşa element $a_{n+1} \in$

$A \setminus \{a_0, a_1, a_2, ..., a_n\}$ şi atunci considerăm $\varphi(n+1) = a_{n+1}$. În acest mod construim funcţia $\varphi(m)$ pentru orice $m \in \mathbb{N}$.

Vom demonstra că funcţia φ este injectivă. Într-adevăr, să presupunem că există două numere $m, n \in \mathbb{N}$, astfel încât $\varphi(m) = \varphi(n)$ şi presupunem contrariul (prin absurd) că $m \neq n$. Putem admite că $m < n$. Cunoaştem din construcţia funcţiei φ, că $\varphi(n) = a_n \in A \setminus \{a_0, a_1, ..., a_m, a_{m+1}, ..., a_{n-1}\}$. De aici se observă că nu e posibil să avem $a_n = a_m = \varphi(m)$. Deci rezultă că nu este posibil să avem $m \neq n$ şi în acelaşi timp $\varphi(m) = \varphi(n)$. Prin urmare, funcţia φ este injectivă, c.t.d. $\square$

Remarca 3.14.1 *Teorema 3.14.2 este cunoscută în teoria mulţimilor sub denumirea Teorema lui Dedekind. Vom da în continuare câteva consecinţe ale acestei teoreme, care vor ilustra comportarea ,,paradoxală" a numerelor cardinale infinite.*

Consecinţa 3.14.1 *Dacă α este un cardinal infinit, atunci $\alpha + \aleph_0 = \alpha$.*

Demonstraţie. Fie A o mulţime infinită de cardinal α. Atunci există o submulţime numărabilă A', astfel încât $A' \subset A$. Prin urmare $A = A' \cup \{A \setminus A'\}$ implică $A \cup N = A' \cup N \cup \{A \setminus A'\}$. Fie α' cardinalul mulţimii $A \setminus A'$. Presupunem că $A \cap N = \varnothing$.

Din egalitatea mulţimilor $A = A' \cup \{A \setminus A'\}$ vom avea $\alpha = \aleph_0 + \alpha'$, iar din egalitatea $A \cup N = A' \cup N \cup \{A \setminus A'\}$ obţinem $\alpha + \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 + \alpha'$. Dar deoarece $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, atunci din ultima egalitate obţinem $\alpha + \aleph_0 = \aleph_0 + \alpha' = \alpha$, c.t.d. $\square$

Consecinţa 3.14.2 *Dacă la o mulţime infinită adăugăm un număr finit de elemente, atunci cardinalul său nu se schimbă.*

Demonstraţie. Fie α cardinalul mulţimii infinite A. Fie M o mulţime finită cu m elemente, astfel încât $M \cap N = \varnothing$.

Atunci mulţimea $M \cup \{A\}$ va avea cardinalul $m + \alpha$. Dar $\alpha = \alpha + \aleph_0$, deci $\alpha + m = (\alpha + \aleph_0) + m = \alpha + (\aleph_0 + m) = \alpha + \aleph_0 = \alpha$. Am presupus aici că $\aleph_0 + m = \aleph_0$. Aceasta rezultă din faptul că există o bijecţie între mulţimile $N \cup M$ şi N (unde $N \cap M = \varnothing$) definită în felul următor:

Dacă $M = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, atunci definim bijecţia astfel $\varphi : \{x_1, x_2, ..., x_m, 0, 1, 2, ..., n, ...\} \to \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$, unde $\varphi(x_i) = i - 1$ pentru $1 \leq i \leq m$ şi $\varphi(0) = m$, $\varphi(1) = m + 1, ...,$ $\varphi(k) = m + k, ...$ c.t.d. $\square$

Remarca 3.14.2 *Când am studiat proprietăţile mulţimilor finite, am demonstrat că o mulţime finită A nu este echivalentă cu nicio submulţime proprie a sa. Dar în continuare vom observa că dacă o mulţime este infinită, atunci ea nu are această proprietate.*

Consecinţa 3.14.3 *O mulţime A este infinită, dacă şi numai dacă ea este echivalentă cu o submulţime proprie a sa.*

Demonstraţie. Vom demonstra mai întâi necesitatea, adică: ,,dacă A este infinită, atunci ea este echivalentă cu o submulţime proprie a sa". În virtutea teoremei lui Dedekind, putem scrie mulţimea A sub forma unei reuniuni de mulţimi disjuncte: $A = A' \cup A''$, unde A' este numărabilă. Atunci $|A| =$

$|A'|+|A''| = \aleph_0+|A''|$. Deoarece mulţimea A' este numărabilă, atunci o putem scrie sub forma $A' = A'_1 \cup A'_2$, unde A'_1 şi A'_2 sunt numărabile şi disjuncte, adică $|A'_1| = |A'_2| = \aleph_0$. Atunci mulţimea $A'' \cup A'_1$ este o submulţime proprie a mulţimii A şi este echivalentă cu A, deoarece $|A'' \cup A'_1| = |A''| + \aleph_0 = |A|$.

Suficienţa, adică implicaţia reciprocă: ,,dacă A este echivalentă cu o submulţime proprie a sa, atunci A este infinită" rezultă dintr-o consecinţă anterioară. □

Consecinţa 3.14.4 *Mulţimea numerelor prime este numărabilă.*
Demonstraţie. Fie P mulţimea numerelor prime şi α este cardinalul acestei mulţimi. Deoarece $P \subset N$, atunci avem $\alpha \leq \aleph_0$. Vom arăta că P este o mulţime infinită şi atunci vom avea şi relaţia $\aleph_0 \leq \alpha$. Vom aplica în continuare teorema lui Cantor-Bernstein pentru a obţine $\alpha = \aleph_0$.

Arătăm că mulţimea P este infinită prin reducere la absurd. Presupunem că P este finită şi conţine n elemente: $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$. Atunci numărul natural $q = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$ nu aparţine lui P şi este prim, deoarece nu este divizibil cu nici unul din numerele prime aparţinând lui P. Aceasta contrazice faptul că mulţimea P conţine toate numerele prime, adică ipoteza asupra lui P este contradictorie. Prin urmare, mulţimea P este infinită, c.t.d. □
Această demonstraţie pentru prima dată a fost obţinută de însuşi Euclid.

Remarca 3.14.3 *Teorema lui Dedekind combinată cu teo-*

rema lui Cantor şi Bernstein ne arată că pentru a demonstra că o mulţime A de cardinal α este numărabilă, este suficient să arătăm că A este infinită şi că există o funcţie injectivă: $\varphi : A \to N$, deoarece atunci rezultă că α este mai mic decât cardinalul lui N, adică $\alpha \leq \aleph_0$. Dar, pe de altă parte, avem $\aleph_0 \leq \alpha$ şi de aceea rezultă $\alpha = \aleph_0$.

Teorema 3.14.3 *Dacă $\{A_n\}_{n\geq 1}$ este o familie numărabilă de mulţimi numărabile disjuncte, atunci $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ este numărabilă.*

Demonstraţie. Presupunem că elementele mulţimii A_i sunt scrise într-un şir:

$$\begin{array}{rcl} A_1 & = & \left\{a_1^1, a_2^1, a_3^1, \cdots, a_n^1, \cdots\right\}, \\ A_2 & = & \left\{a_1^2, a_2^2, a_3^2, \cdots, a_n^2, \cdots\right\}, \\ A_3 & = & \left\{a_1^3, a_2^3, a_3^3, \cdots, a_n^3, \cdots\right\}, \\ & & \cdots\cdots\cdots \\ A_n & = & \{a_1^n, a_2^n, a_3^n, \cdots, a_n^n, \cdots\}, \\ & & \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

În acest caz există o funcţie bijectivă $\varphi : \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definită astfel: $\varphi(a_j^i) = (i, j)$. Această funcţie este bijectivă, deoarece am presupus că $A_i \cap A_j = \varnothing$ pentru $i \neq j$, adică nu este posibil ca două elemente a_j^i şi a_l^k să fie egale, fără ca să avem $i = k$ şi $j = l$. În acest caz, cardinalul produsului scalar $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$, c.t.d. $\square$

Teorema 3.14.4 *Mulţimea numerelor raţionale $\mathbb{Q}$ este mulţime numărabilă.*

Demonstraţie. Fie $\mathbb{Q}_+$ mulţimea numerelor raţionale strict pozitive. Definim o funcţie $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ în modul următor: fie $x \in \mathbb{Q}_+$, atunci x se scrie în mod univoc sub forma $x = \frac{a}{b}$, unde a şi b sunt numere naturale pozitive prime între ele (având cel mai mare divizor comun egal cu 1). Prin definiţie vom considera $f(x) = f(\frac{a}{b}) = (a, b)$. Uşor se observă că această funcţie f este injectivă şi de aceea vom avea $|\mathbb{Q}_+| \leq \aleph_0$. Pe de altă parte, mulţimea $\mathbb{Q}_+$ este infinită, deoarece $\mathbb{Q}_+ \supset \mathbb{N} \setminus \{0\}$ şi de aceea $|\mathbb{Q}_+| \geq \aleph_0$. În virtutea teoremei Cantor-Bernstein, avem $|\mathbb{Q}_+| = \aleph_0$. În mod analogic se demonstrează că mulţimea numerelor raţionale negative $\mathbb{Q}_-$ este la fel numărabilă.

Din cele demonstrate anterior, rezultă că mulţimea $\mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_-$ este de asemenea numărabilă, de unde rezultă că mulţimea $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_-) \cup \{0\}$ are de asemenea cardinalul $\aleph_0$, c.t.d. $\square$

Teorema 3.14.5 *Dacă A este o mulţime de cardinal α, atunci mulţimea submulţimilor (părţilor) $\mathbf{P}(A)$ are cardinalul 2^α.*

Demonstraţie. Vom considera mulţimea $\{0, 1\}$ care conţine două elemente. Construim o nouă funcţie $\varphi : \mathbf{P}(A) \to \{0, 1\}^A$, pe care o definim în felul următor: dacă $A' \subset A$, atunci îi vom asocia prin φ funcţia $\varphi_{A'} : A \to \{0, 1\}$, care stabileşte corespondenţa:

$$\varphi_{A'}(a) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } a \in A', \\ 0, & \text{dacă } a \notin A'. \end{cases}$$

În literatura de specialitate, această funcţie se numeşte *funcţia caracteristică* a mulţimii A'.

Se observă că dacă $\varphi_{A'} = \varphi_{A''}$, atunci rezultă că $\varphi_{A'}$ şi $\varphi_{A''}$ iau valoarea 1 pentru aceleaşi elemente ale lui A şi deci $A' = A''$. Prin urmare, funcţia φ este injectivă. Această funcţie este şi surjectivă, deoarece oricărei funcţii $f : A \to \{0, 1\}$ îi găsim o preimagine A', astfel încât $\varphi_{A'} = f$, şi anume, $A' = f^{-1}(\{1\}) = \{a \in A | f(a) = 1\}$, c.t.d. $\square$

Teorema 3.14.6 *(Cantor). Pentru orice număr cardinal α, avem $\alpha < 2^\alpha$ (adică $\alpha \leq 2^\alpha$ şi $\alpha \neq 2^\alpha$).*

Demonstraţie. Pentru a demonstra inegalitatea $\alpha \leq 2^\alpha$, vom construi o funcţie injectivă $\varphi : A \to \mathbf{P}(A)$ definită astfel: $\varphi(a) = \{a\}$.

Presupunem contrariul, adică fie prin reducere la absurd că avem $\alpha = 2^\alpha$. Aceasta înseamnă că există o bijecţie $\psi : A \to \mathbf{P}(A)$, unde pentru un element $a \in A$, avem că $\psi(a)$ este o submulţime a mulţimii A. Prin urmare, este posibil să avem $a \in \psi(a)$ sau $a \notin \psi(a)$. Vom considera mulţimea $B = \{a \in A | a \notin \psi(a)\}$.

Deoarece submulţimea $B \in \mathbf{P}(A)$ şi ψ este surjectivă, atunci există un element $b \in A$, astfel încât să avem $\psi(b) = B$.

Vom verifica în continuare dacă acest element b aparţine sau nu submulţimii B. Dacă $b \in B$, atunci din construcţia acestei submulţimi B, avem că $b \notin \psi(b)$. Pe de altă parte, avem $\psi(b) = B$, adică $b \notin B$. Aceasta contrazice faptul că $b \in B$.

Să presupunem în continuare că $b \notin B$. Atunci tot din construcţia mulţimii B rezultă că $b \in \psi(B) = B$, ceea ce contrazice faptul că $b \notin B$. Aşadar, am construit aşa o mulţime B şi un element $b \in A$, astfel încât nu avem nici $b \in B$, nici $b \notin B$, deoarece ambele cazuri ne conduc la contradicţii. Această contradicţie se datorează presupunerii că există funcţia bijectivă $\psi : A \to \mathbf{P}(A)$. Astfel, obţinem că $\alpha \neq 2^{\alpha}$, c.t.d. □

3.15 Puterea continuului

Au fost cercetate anterior astfel de mulţimi infinite care erau şi mulţimi numărabile. Totodată, am observat că mulţimea $\mathbf{P}(\mathbb{N})$ nu mai poate fi numărabilă, deoarece cardinalul ei este $2^{\aleph_0}$ şi $\aleph_0 \neq 2^{\aleph_0}$. În continuare, vom da şi alte exemple de mulţimi infinite care nu sunt numărabile.

Teorema 3.15.1 *(Cantor). Mulţimea $I = [0, 1]$ a numerelor reale cuprinse între zero şi unu nu este numărabilă.*

Demonstraţie. Presupunem contrariul, că mulţimea I este numărabilă, adică există aşa o funcţie bijectivă $\Theta : \mathbb{N} \to [0, 1]$ care ne dă posibilitatea să aranjăm într-un şir toate numerele reale pozitive subunitare $I = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$.

Cunoaştem că orice număr real subunitar pozitiv se poate scrie sub forma unei fracţii zecimale: $0, a_1 a_2 ... a_n ...$, unde a_i sunt cifre cuprinse între 0 şi 9: $(0 \leq a_i \leq 9)$. De exemplu, $1 = 0, 999....$ În acest caz, elementele mulţimii I se scriu astfel:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, a_1^1 a_1^2 a_1^3 \cdots a_1^n \cdots \\ a_2 &= 0, a_2^1 a_2^2 a_2^3 \cdots a_2^n \cdots \\ a_3 &= 0, a_3^1 a_3^2 a_3^3 \cdots a_3^n \cdots \\ & \cdots\cdots\cdots \\ a_n &= 0, a_n^1 a_n^2 a_n^3 \cdots a_n^n \cdots \end{aligned}$$

Vom construi numărul real $b = 0, b_1 b_2 ... b_n ...$, unde

$$b_n = \begin{cases} 2, & \text{dacă } a_i^i \neq 2, \\ 1, & \text{dacă } a_i^i = 2. \end{cases}$$

Numărul $b \in I = [0,1]$, adică există un aşa indice k, astfel încât $b = a_k$.

Deoarece scrierea zecimală a lui b este unică, din faptul că $b = a_k$ rezultă că cifra zecimală de pe poziţia k în numărul b şi a_k este aceeaşi, adică $b_k = a_k^k$, ceea ce contrazice construcţia lui b, c.t.d. $\square$

Consecinţa 3.15.1 *Mulţimea* $I = [0,1]$ *conţine mulţimea numărabilă:* $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$ *Prin urmare, pentru mulţimea* I *are cardinalul* $|I| > \aleph_0$.

Vom nota prin $\mathbf{c}$ cardinalul mulţimii I, adică $|I| = \mathbf{c}$. Acest cardinal se numeşte *puterea continuului.* Între puterea continuului şi alef zero ($\aleph_0$) există deci relaţia $\aleph_0 < \mathbf{c}$.

Un rezultat important cu privire la legătura dintre aceste două numere cardinale îl constituie faptul că $\mathbf{c} = 2^{\aleph_0}$.

Teorema 3.15.1 poartă denumirea de *,,procedeul diagonal al lui Cantor"* şi a constituit punctul de plecare al lui Cantor în construcţia teoriei numerelor cardinale, deoarece i-a furnizat pentru prima dată un exemplu de mulţime infinită care nu este numărabilă, inspirându-i ideea unei ierarhizări după numărul de elemente chiar şi între mulţimile infinite.

Consecinţa 3.15.2 *Mulţimile* $(0,1]$ *şi* $[0,1)$ *au puterea continuului.*

Demonstraţie. Într-adevăr, vom scrie:
$I = (I \setminus \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\}) \cup \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$. Dacă α este cardinalul lui $I \setminus \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$, atunci avem $\mathbf{c} = \alpha + \aleph_0$.
Pe de altă parte obţinem:
$I \setminus \{1\} = [0,1) = (I \setminus \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\}) \cup \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$.
Prin urmare, cardinalul lui $[0,1)$ este $\alpha + \aleph_0 = \mathbf{c}$.
În mod analogic se demonstrează şi pentru mulţimea $(0,1]$. $\square$

Teorema 3.15.2 *Orice interval închis* $[a,b]$ *are puterea continuului* $\mathbf{c}$.

Demonstraţie. Definim funcţia $f : [0,1] \to [a,b]$, astfel: $f(x) = (b-a)x + a$. Această funcţie este bijectivă. Într-adevăr, deoarece $a < b$, avem $b - a \neq 0$, adică f este injectivă (rezultă din materialul anterior). În plus, f este surjecţie, deoarece orice număr $\Theta \in [a,b]$ poate fi scris sub forma:
$\Theta = b - a\dfrac{\Theta - a}{b-a} + a = f(\dfrac{\Theta - a}{b-a})$, iar $0 \leq \dfrac{\Theta - a}{b-a} \leq 1$. $\square$

Consecinţa 3.15.3 *Orice interval de forma* $[a, b)$, $(a, b]$ *sau* $[a, b]$ *are puterea continuului.*

Consecinţa 3.15.4 *Mulţimea numerelor reale* $\mathbb{R}$ *are puterea continuului.*

Demonstraţie. Într-adevăr, funcţia $tg : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ este bijectivă şi, prin urmare, mulţimea $\mathbb{R}$ este echivalentă cu intervalul $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. $\square$

3.16 Exerciţii propuse pentru lucrul individual

Ex.1. Se consideră mulţimile A, B, C date:
$A = \{a, b, d, e, f, g, i, k, m, n, s, t\}$, $B = \{a, c, d, e, f, i, j, l, m, n, t\}$, $C = \{a, b, c, d, f, j, k, l, n, s, u, v\}$.

Să se determine mulţimile care se obţin prin aplicarea operaţiilor asupra mulţimilor iniţiale:
a) $A \cup B$, b) $A \cap C$, c) $(A \cap B) \cup C$, d) $(A \cup B) \cup C$,
e) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, f) $((A \cup B) \cap C)$, g) $((A \cup B) \setminus C)$,
h) $((A \cap B) \setminus C)$, i) $((A \cup C) \setminus B)$, j) $((A \cap B) \setminus B)$,
k) $(A \triangle B) \cup (A \triangle C)$, l) $(A \triangle B) \cup (B \setminus C)$, m) $(A \setminus C) \cap (B \triangle C)$,
n) $(A \cup B) \cap (C \triangle A)$, o) $(A \cup B) \setminus (B \triangle C)$, p) $(A \setminus B) \triangle C$.

Ex.2. Se consideră mulţimile A, B, C date în Ex.1 şi mulţimile P, Q, R, S date în continuare: $P = \{b, d, e, f, j, k, m\}$, $Q = \{a, b, c, f, n, s\}$, $R = \{a, b, j, k, l\}$, $S = \{b, c, f, l, m, n, t, u\}$. Să se determine apartenenţa mulţimilor de mai jos (obţinute prin aplicarea operaţiilor asupra mulţimilor P, Q, R, S) la mulţimile iniţiale A, B, C din Ex.1:

a) $(P \cap Q) \cup R$; b) $(Q \setminus R) \cap (P \triangle Q)$;
c) $(Q \setminus P) \cap S$; d) $(P \cap R) \setminus (Q \cap S)$;
e) $(P \cup Q) \triangle (R \setminus S)$; f) $(P \cup S) \setminus (R \cap Q)$;
g) $(P \cap Q \cap S) \cup R$; h) $(S \cup (P \cup R)) \triangle Q$;
i) $(P \cap Q) \cup (Q \triangle S) \cup Q)$; j) $(Q \setminus R) \cup (P \cup (S \triangle Q))$;
k) $((P \cup S) \setminus (Q \cap P)$, l) $((R \cap S) \triangle P) \cup Q$.

Ex.3. Se consideră mulţimile A, B, C date:
$A = \{0.5; 4\frac{1}{2}; 6; 9; -4\frac{1}{12}; \sqrt{6}; |\sqrt{4}|; -10; 7; -0.12; -\sqrt{-5}\}$,
$B = \{-2; 10; \sqrt{5}; -0.12; \frac{10}{16}; -4.5; 0.5; \sqrt{6}; 2.5; \sqrt{-2}\}$,
$C = \{4\frac{1}{2}; -4.5; |\sqrt{4}|; 0.5; \frac{10}{16}; \frac{25}{10}; -20; -4\frac{1}{2}; 4\frac{1}{2}; \sqrt{-1}\}$.
Să se determine mulţimile care se obţin prin aplicarea operaţiilor asupra mulţimilor A, B, C şi mulţimile: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$.
a) $(A \cup C) \cap \mathbb{N}$, b) $(B \cap A) \cap \mathbb{R}$, c) $(B \cap C) \cup (C \setminus \mathbb{N})$,
d) $((A \cup C) \cap \mathbb{Q}) \setminus C$, e) $(A \triangle B) \cup (C \triangle A) \cup \mathbb{N}$, f) $(B \cup (A \cap \mathbb{C}))$,
g) $(B \setminus C) \cup (A \cap \mathbb{C})$, h) $(A \cup C) \setminus (B \cap \mathbb{Z})$, i) $(A \cap B) \setminus \mathbb{Z}$,
j) $((A \setminus B) \cup (B \setminus C)) \cap \mathbb{N}$, k) $(A \cap \mathbb{N}) \cup (B \cap \mathbb{Z}) \cup (C \cap \mathbb{Q})$,
l) $(A \triangle B) \cup (C \setminus \mathbb{N})$, m) $(A \setminus C) \cup (B \cap \mathbb{Z})$, n) $(A \cup B \cup C) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N})$.

Ex.4. Să se determine cardinalul mulţimilor din Ex.1,2,3.

Ex.5. Să se determine mulţimile care se obţin prin aplicarea operaţiilor asupra mulţimilor $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$: a) $\mathbb{R} \cup \mathbb{N}$, b) $\mathbb{R} \cap \mathbb{N}$, c) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Q}$, d) $\mathbb{R} \cup (\mathbb{N} \cup \mathbb{Q})$, e) $\mathbb{R} \cup \mathbb{C}$, f) $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Q}$, g) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{C}$, h) $(\mathbb{N} \cup \mathbb{R}) \setminus \mathbb{Q}$, i) $\mathbb{C} \cap \mathbb{N}$, j) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, k) $(\mathbb{R} \cap \mathbb{N}) \setminus \mathbb{C}$, l) $(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{C}) \cup \mathbb{Z}$, m) $(\mathbb{Z} \cup \mathbb{N}) \setminus (\mathbb{C} \cap \mathbb{N})$, n) $(\mathbb{Z} \cap \mathbb{C}) \setminus \mathbb{R}$.

Ex.6. Să se determine care dintre mulţimile obţinute în Ex.5 sunt numărabile şi care nu sunt mulţimi numărabile, care mulţimi sunt nevide şi care mulţimi sunt vide.

Glosar de abrevieri şi noţiuni utilizate în capitolul 3:

- Mulţimea numerelor naturale ($\mathbb{N}$);
- Mulţimea numerelor întregi ($\mathbb{Z}$);
- Mulţimea numerelor raţionale ($\mathbb{Q}$);
- Mulţimea numerelor reale ($\mathbb{R}$);
- Mulţimea numerelor complexe ($\mathbb{C}$);
- Incluziunea mulţimilor, reuniunea, intersecţia mulţimilor,
- Diferenţa mulţimilor, diferenţa simetrică a mulţimilor;
- Complementara mulţimii, produsul cartezian al mulţimilor;
- Proprietatea: asociativă, comutativă, distributivă,
- Proprietatea: idempotentă, izotonă;
- Mulţimi finite, mulţimi infinite, mulţimi numărabile;
- Numere cardinale, mulţimi cardinal echivalente;
- Operaţii cu numere cardinale;
- Înmulţirea puterilor unui număr cardinal;
- Mulţimi alternative numărabile;
- Număr cardinal infinit;
- Clasa de echivalenţă a mulţimilor numărabile (numărul cardinal $\aleph_0$ (,,alef");
- Cel mai mic număr cardinal infinit ($\aleph_0$: ,,alef 0");
- Teorema Cantor-Bernstein, Teorema Dedekind;
- ,,Procedeul diagonal al lui Cantor";
- Puterea continuului ($\mathbf{c}$)- (cardinalul mulţimii $I = [0, 1]$).

BIBLIOGRAFIE

[1] Barnes, D.W. and Mack, J.M. *An Algebraic Introduction to Mathematical logic.* Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1975.

[2] Becheanu,M., Căzănescu,V., Năstăsescu,C., Rudeanu,S. *Logica matematică şi teoria mulţimilor*. Bucureşti: Ed. Did. şi Ped., 1972.

[3] Căzănescu, V. *Curs de bazele informaticii. Introducere în logica matematică.* Universitatea din Bucureşti, Fac. Matematică, 1981.

[4] Corlat, A., Corsac, S. *Elemente de Teoria mulţimilor. Note de curs.* Chişinău, 2008.

[5] Cucu, I., Prisăcaru, Ch. *Culegere de probleme la logica matematică.* Chişinău: CEP USM, 2003.

[6] Cucu, I., Rusu, A., Rusu, E. *Elemente de logică matematică.* Chişinău: CEP USM, 2006.

[7] Cucu, I., Rusu,A., Rusu, E. *Logica matematică. Prelegeri.* Chişinău: CEP USM, 2003.

[8] Cucu, I., Izbaş, O. *Matematică discretă.* Chişinău, Universitatea Academiei de Ştiinţe a Moldovei, 2016.

[9] Năstăsescu, C. *Introducere în teoria mulţimilor.* Bucureşti: Ed. Did. şi Ped., 1974.

[10] Novac, L., Cucu, I. *Bazele Matematicii discrete şi Logicii matematice*. Chişinău: CEP USM, 2016.

[11] Prisăcari, Ch.F., Gorgos,I.M. *Logica matematică. Material didactic*. Chişinău: USM, 1982.

[12] Prisăcaru, C.F. *Logica matematică şi matematica discretă. Material didactic*. Chişinău, 1981.

[13] Rudeanu, S. *Curs de bazele informaticii. Logica Matematică, II–Calculul propoziţiilor*. Univ. din Bucureşti, 1977.

[14] Rudeanu, S. *Lecţii de calculul predicatelor şi calculul propoziţiilor*. Bucureşti: Ed.Univ. din Bucureşti, 1997.

[15] Stănesilă, O. *Noţiuni şi tehnici de matematică discretă*. Bucureşti: Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, 1985.

[16] Алексардров, П.С. *Введение в теорию множеств и общую топологию*. Москва: Наука, 1977.

[17] Бурбаки, Н. *Теория множеств*. Москва: Мир, 1965.

[18] Гаврилов, Г.П., Сапоженко, А.А. *Сборник задач по дискретной математике*. Москва: Наука, 1977.

[19] Гиндикин, С.Г.*Алгебра логики в задачах*. Москва: Наука, 1972.

[20] Гильберт, Д., Бернайс, П. *Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики*. Москва: Наука, 1982.

[21] Ершов, Ю.Л., Палютин, Е.А., *Математическая логика.* Москва: Наука, 1987.

[22] Игошин, В.И. *Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов.* Москва: Издательский центр "Академия 2007.

[23] Лавров, И.А., Максимова, Л.Л. *Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов.* Изд. 2-е, Москва: Наука, 1986.

[24] Лихтарников, Л.М., Сукачева, Т.Г. *Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения. Учебное пособие.* Изд.4-е, Санкт-Петербург, Москва, Краснодар,2009.

[25] Мендельсон, Э. *Введение в математическую логику.* Москва: Наука, 1984.

[26] Новиков, П.С. *Элементы математической логики.* Москва: Изд. Физ.-Математ. литературы, 1973.

[27] Новиков, П.С. *Конструктивная математическая логика с точки зрения классической.* Москва: Наука, 1977.

[28] Столл, Р. *Множества. Логика. Аксиоматические теории.* Москва, 1968.

Ludmila NOVAC, Ion CUCU
LOGICA PROPOZIŢIILOR
ŞI TEORIA MULŢIMILOR

Note de curs

Redactor: **Antonina Dembiţchi**
Machetare computerizată: **Ludmila Novac**

Bun de tipar 10.12.2019. Formatul 60x84 1/16
Coli editoriale **8,5** Coli de tipar **9,6**
Comanda **80**. Tirajul **50** ex.

Centrul Editorial – Poligrafic al USM
Str. Al. Mateevici, 60, Chişinău, MD-2009