STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2017, nr.2(102)
Seria "Științe exacte și economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.3-12

CZU: 515.14:515.1:517.5

GRUPURI PUNCTUALE CRISTALOGRAFICE DE W_p – SIMETRII CICLICE

Alexandru LUNGU
Universitatea de Stat din Moldova

În acest articol sunt deduse şi descrise unele grupuri ale W_p− simetriei cu grupul inițial de substituții ciclic de odrinul al doilea, care au în calitate de grupuri generatoare grupuri punctuale cristalografice de simetrie clasică.
Cuvinte-cheie: *simetrii generalizate, grupuri, cvasiomomorfisme de dreapta, împletiri a două grupuri.*

CRISTALLOGRAFIC PUNCTUAL GROUPS OF CYCLICAL W_p – SYMMETRIES

In the present paper there are derived and described some groups of W_p − symmetry with initial cyclical group of permutation by second order, who have in quality of generating groups the cristallografic punctual groups of classical symmetry.
Keywords: *generalized symmetries, groups, right quasi-homeomorphisms, wreath product of two groups.*

1. Cercetarea structurii generale şi a proprietăţilor grupurilor de W_p – simetrii, în general, este mult mai dificilă decît problema analogică pentru grupurile de *P*– simetrie sau chiar pentru cele de $\bar{P}$ – simetrie.

Scopul acestui studiu constă în elucidarea particularităţilor specifice ale structurii generale pentru grupurile de W_p – simetrii ciclice cu grupul generator dat şi grupul iniţial de substituţii *P* ciclic, în analiza structurii concrete a grupurilor de W_p – simetrii ciclice deduse şi în evidenţierea diferitelor tipuri de subgrupuri ale lor din punctul de vedere al nivelului de generalizare a simetriei clasice.

Vom începe studiul nostru cu analiza succintă a unor aspecte utile din teoria generală a grupurilor [1-3] şi din bazele teoriei generale a generalizării simetriei clasice cu numele de W_p – simetrie [4-9].

2. Fie sunt date două grupuri G şi *P*. Construim produsul cartezian *W* al cópiilor izomorfe cu grupul *P* şi indexate sus în dreapta pe rând cu toate elementele grupului G, adică $W = P^{g_1} \times P^{g_2} \times \ldots \times P^{g_n} \times \ldots = \bar{\prod}_{g_i \in G} P^{g_i}$ (unde $P^{g_i} \cong P$). Fie că se dă includerea izomorfă φ a grupului *G* în grupul tuturor automorfismelor grupului W conform regulii $\varphi(g) = \bar{\varphi}_g = \bar{g}$, unde automorfismul $\bar{g}$ acţionează asupra elementelor $w = <\ldots, p^{g_i}, \ldots>$ din *W* prin intermediul *g*-deplasărilor la stânga ale componentelor lor, generat de înmulțirea la stânga a grupului *G* cu elementul său *g*, adică $\bar{g}(w) = w^g = <\ldots, p^{gg_i}, \ldots>$. Se consideră mulţimea $A = GW$ tuturor perechilor *gw*, unde $g \in G$ şi $w \in W$, care este un grup cu legea de compoziţie $g_i w_i * g_j w_j = g_k w_k$, unde $g_k = g_i g_j$ şi $w_k = \bar{g}_j(w_i) w_j = w_i^{g_j} w_j$. Grupul *A* este numit împletire (torsificare) standard carteziană de stânga a grupului *P* cu grupul de operatori *G*, însoţită de deplasarea directă la stânga a componentelor. Structura algebrică obţinută se notează cu simbolul $\bar{G}\ Wr\ P$. Este evident că grupul A este un produs semidirect de stânga al grupului W cu grupul de operatori G, însoţit de izomorfismul $\varphi : G \to AutW$ construit conform regulii $\varphi(g) = \bar{g}$; deci, putem scrie că $\bar{G}\ Wr\ P = \bar{\bar{G}} \leftthreetimes W$.

De menţionat că rolul grupurilor G şi *P* în împletirea standard carteziană de stânga obţinută este diferit. Anume: grupul *P* joacă un rol pasiv, participând cu cópiile sale izomorfe în structura algebrică considerată, pe când grupul G joacă un rol activ, implicându-se prin intermediul elementelor sale în operaţia de grup şi generând anumite automorfisme ale grupului W. Mai mult decât atât, toate automorfismele neidentice $\bar{g}$ ale grupului W, generate de elementele *g* din grupul *G* prin intermediul *g* − deplasărilor la stânga ale componentelor din W, sunt externe. În particular, dacă *W* este un produs direct al cópiilor izomorfe cu grupul *P* şi indexate cu elementele din grupul *G*, atunci prin analogie se obţine împletirea (torsificarea) standard directă de stânga a grupurilor *P* şi *G*, care se notează cu simbolul $\bar{G}\ wr\ P$.

Fie $\widetilde{G}$ o torsificare (împletire) standard directă de stânga a grupurilor finite G şi P. În acest caz, fiecare element $\widetilde{g} = gw$ din $\widetilde{G}$ este format din două componente g şi w, unde componenta w constă din $n = |G|$ subcomponente p (elemente ale grupului P), adică $w = < p^{g_1}, p^{g_2}, ..., p^{g_n} >$, unde $p^{g_i} \in P^{g_i}$, iar grupul P^{g_i} este izomorf cu grupul P.

3. Fie se dă mulţimea ordonată $N = \{1, 2, ..., m\}$ de „indici", care reprezintă m calităţi de aceeaşi natură generală cu caracter scalar (faze ale aceluiaşi fenomen, de exemplu: temperatură, presiune, densitate, masă, culori ş.a.). Fixăm grupul tranzitiv de substituţii P al acestor „indici". Consideram o figură geometrică F cu grupul discret de simetrie G. Fie M_1 un punct de poziţie generală al figurii F faţă de grupul G. Vom evidenţia orbita punctului M_1 în raport cu grupul G, adica sistemul de puncte G - echivalente $\{ g_k(M_1) = M_k \in F \}$, unde $g_k \in G$. Fiecărui punct de poziţie generală al figurii F îi atribuim cel puţin unul din „indicii" mulţimii N. Menţionăm că numărul de „indici" atribuiţi punctelor este acelaşi. În rezultat se obţine o figură „indexată" în mod regulat $F^{(N)}$.

Se numeşte transformare de W_p – simetrie a figurii „indexate" $F^{(N)}$ aşa o aplicaţie izometrică $g^{(w)} = gw$ a ei pe sine, încât componenta geometrică g (transformare de simetrie clasică) acţionează direct numai asupra punctelor $M_k = g_k(M_1)$ ale figurii $F^{(N)}$, iar „indicii" atribuiţi punctelor M_k se transformă de către substituţia p^{g_k} („g_k – componentă" în w din W). Vom sublinia că transformarea $g^{(w)} = gw$ de $W_p -$ simetrie include în sine atât informaţia despre transformarea propriu-zisă a punctelor figurii geometrice considerate (componenta geometrică g), cât şi informaţia completă despre transformarea (schimbarea) „indicilor" r localizaţi în punctele interioare M_k ale domeniilor fundamentale ale grupului de simetrie G (componenta a doua w).

Legea de schimbare a „indicilor" este formată din elemente-substituţii ce acţionează local (pentru punctele diferitelor domenii fundamentale, în general, există substituţii diferite). Anume, în diferite puncte G-echivalente M_i şi M_j „indicii" r_i şi, respectiv, r_j localizaţi în ele sunt transformaţi, în general, de către diferite substituţii p_i şi, respectiv, p_j din grupul P. Acest lucru este posibil doar în cazul când transformarea $g^{(w)} = gw$ de $W_p -$ simetrie a figurii „indexate" $F^{(N)}$ include substituţia respectivă pentru fiecare punct M_i al sistemului de puncte G-echivalente. Prin urmare, $w = < p^{g_1}, p^{g_2}, ..., p^{g_n} >$, unde $p^{g_i} = p^{g_1}$ dacă în punctele $M = g_1(M)$ şi $M_i = g_i(M) \neq M$ „indicii" sunt supuşi aceleiaşi substituţii $p \in P$, iar $p^{g_i} \neq p^{g_j}$ dacă în punctele $g_i(M)$ şi $g_j(M)$ „indicii" sunt transformaţi de diferite substituţii din grupul iniţial dat P. Deci, componenta a doua w a transformării $g^{(w)} = gw$ de $W_p -$ simetrie se prezintă sub forma unui cortegiu de elemente ale grupului dat iniţial de substituţii P, adică $w = < p^{g_1}, p^{g_2}, ..., p^{g_n} >$.

Mulţimea $G^{(W_p)}$ a tuturor transformărilor de W_p – simetrie ale oricărei figuri „indexate" $F^{(N)}$ formează un grup cu legea de compoziţie $g_i^{(w_i)} * g_j^{(w_j)} = g_k^{(w_k)}$, unde $g_k = g_i g_j$, $w_k = w_i^{g_j} w_j$, iar $w_i^{g_j} = < ..., p_i^{g_j g_k}, ... >$; adică, $w_i^{g_j}(g_k) = w_i(g_j g_k)$.

Fie $G^{(W_p)}$ – un grup de W_p – simetrie. Vom nota prin W' mulţimea tuturor componentelor w din elementele $g^{(w)}$ ale grupului $G^{(W_p)}$. Mulţimea W', în general, nu formează un grup. W' este o submulţime cu unitatea w_0 a grupului W ($w_0 \subseteq W' \subseteq W$). Subgrupul V al transformărilor W – identice ale grupului $G^{(W_p)}$ ($V = G^{(W_p)} \cap W' = G^{(W_p)} \cap W$) întotdeauna este un divizor normal în $G^{(W_p)}$. În ce priveşte subgrupul de simetrie H al grupului $G^{(W_p)}$ ($H = G^{(W_p)} \cap G$), el, în general, nu este un divizor normal.

Grupul de simetrie G se numeşte grup generator pentru $G^{(W_p)}$, iar mulţimea tuturor grupurilor de W_p – simetrie cu acelaşi grup generator se numeşte familie. Grupul de W_p – simetrie $G^{(W_p)}$ se numeşte major, minor, mijlociu (V – mijlociu), semimajor (W' – semimajor), semiminor (W' – semiminor), semimijlociu ((W',V) – semimijlociu), pseudominor (W' – pseudominor) sau pseudomijlociu ((W',V) – pseudomijlociu) dacă, respectiv, $w_0 < V = W' = W$, $w_0 = V < W' = W$, $w_0 < V < W' = W$, $w_0 < V = W' < W$, $w_0 = V < W' < W$, $w_0 < V < W' < W$, $w_0 = V \subset W' \subset W$ (dar W' nu este subgrup în W) sau $w_0 < V \subset W' \subset W$ (dar W' nu este subgrup în W).

Dacă subgrupul V de transformări W – identice ale grupului $G^{(W_p)}$ este unitar, atunci omomorfismul φ cu nucleul V al grupului $G^{(W_p)}$ pe grupul său generator G, conform regulii $\varphi(g^{(w)}) = g$, este pur şi simplu un izomorfism. Ca consecinţă, grupurile minore, semiminore şi pseudominore de W_p – simetrie sunt izomorfe cu grupurile lor generatoare. În acest caz numărul $|G|$ este divizibil prin numărul $|W'|$, unde W' este mulţimea tuturor componentelor w din elementele $g^{(w)}$ ale grupului considerat $G^{(W_p)}$.

Pentru a obţine o generalizare netrivială a simetriei clasice, trebuie ca grupul respectiv de substituţii P să verifice condiţia $|P| \geq 2$. În consecinţă, $|W| = |P^G| \geq 2^{|G|} > |G|$. Grupurile minore de W_p -simetrie, dacă ele ar exista, ar trebui să verifice condiţia $|W| \leq |G|$. Ultima relaţie este incompatibilă cu cerinţa $|W| > |G|$. Deci, grupuri minore de W_p – simetrie, pur şi simplu, nu există.

4. Dintre proprietăţile specifice ale grupurilor de W_p – simetrie ce ţin de structura lor generală vom menţiona doar următoarele:

1) Grupurile $G^{(W_p)}$ de W_p – simetrie ale figurii „indexate" $F^{(N)}$ sunt subgrupuri ale torsificărilor standard carteziene ale grupului tranzitiv de substituţii P cu grupul discret de simetrie G (în calitate de grup de operatori). Prin urmare, grupurile $G^{(W_p)}$ au ca bază geometrică grupul discret de simetrie G al figurii date iniţial F. Înseşi figurile „indexate" $F^{(N)}$ (ce modelează geometric grupurile respective de W_p – simetrie) pot fi considerate ca submulţimi ale produsului cartezian al mulţimii de puncte F cu mulţimea de „indici" N.

2) În orice grup de W_p – simetrie $G^{(W_p)}$, cu grupul iniţial de substituţii *P* şi grupul generator *G*, submulţimea $W' = \{w \mid g^{(w)} \in G^{(W_p)}\}$, subgrupul *V* de transformări *W*-identice şi subgrupul de simetrie *H*, se conţine în calitate de subgrup grupul $G_1^{(W_1)}$. Grupul $G_1^{(W_1)}$ este determinat de acelaşi grup iniţial de substituţii *P*, are grupul generator G_1 (unde $G_1 \leq G$), iar totalitatea componentelor *w*, ce caracterizează transformarea „indicilor", formează subgrupul W_1 din *W*, care verifică condiţiile $W_1 \leq DiagW \cong P$ şi $W_1 \subset W'$. Vom menţiona că grupul $G_1^{(W_1)}$ are subgrupul V_1 de transformări *P*-identice (unde $V_1 = V \cap DiagW$) şi acelaşi subgrup de simetrie H. Grupul $G_1^{(W_1)}$ formal nu se deosebeşte de grupurile de P –simetrie Zamorzaev.

3) Dacă grupul *W* este finit, atunci: a) $V^g = wVw^{-1}$ pentru componentele g şi w ale transformărilor $g^{(w)}$ din $G^{(W_p)}$; b) orice element al clasei de resturi Hg este combinat în perechi cu fiecare element al clasei de resturi wV, iar elementele claselor diferite Hg_i şi Hg_j – cu elementele claselor diferite w_iV şi, respectiv, w_jV.

4) Două grupuri de W_p – simetrie $\widetilde{G}$ şi $\widetilde{G}'$ de aceeaşi categorie $G_{nr..t}^{W}$ se numesc echivalente dacă există aşa o transformare afină A a spaţiului n-dimensional (în care acţionează transformările mixte ale acestor grupuri), care aplică P – afin (conform unei substituţii p din grupul P) orice clasă de puncte „indexate" transformate de grupul $\widetilde{G}$ pe o clasă de puncte „indexate" transformate de grupul $\widetilde{G}'$, astfel încît

sistemul de elemente deosebite cosubordonate ale grupului $\tilde{G}$ se aplică pe sistemul de elemente deosebite cosubordonate ale grupului $\tilde{G}'$. Şi în acest caz pentru grupurile echivalente $\tilde{G}$ şi $\tilde{G}'$ este verificată relaţia $\tilde{G}'= A\tilde{G}A^{-1}$, adică există izomorfismul $\varphi : \tilde{G} \to \tilde{G}'$ ce păstrează invariant tipul transformărilor. Anume: w-rotaţiei îi corespunde o w-rotaţie de acelaşi ordin, w-reflexiei îi corespunde o w-reflexie, w-translaţiei îi corespunde o w-translaţie etc.; p-rotaţiei îi corespunde o p-rotaţie de acelaşi ordin, p-reflexiei îi corespunde o p-reflexie, p- translaţiei îi corespunde o p-translaţie etc.; rotaţiei îi corespunde o rotaţie de acelaşi ordin, reflexiei îi corespunde o reflexie, translaţiei îi corespunde o translaţie etc. Ca consecinţă, dacă grupurile $\tilde{G}$ şi $\tilde{G}'$ de W_p - simetrie sunt echivalente, atunci ele verifică următoarele proprietăţi: a) ambele au acelaşi grup iniţial de substituţii P şi acelaşi grup generator G, adică grupurile echivalente sunt subgrupuri izomorfe ale torsificării standard carteziene de stânga a grupului P cu grupul G; b) ambele sunt de acelaşi tip ca grupuri de W_p - simetrie; c) ambele au subgrupuri de simetrie conjugate şi subgrupuri de transformări W - identice tot conjugate; d) grupurile $\tilde{G}$ şi $\tilde{G}'$ au subgrupuri de P-simetrie echivalente.

5. Dintre proprietăţile specifice ale grupurilor majore de W_p – simetrie ce ţin de structura lor generală vom menţiona doar următoarele: În orice grup major de W_p – simetrie $G^{(W_p)}$, cu grupul iniţial de substituţii *P* şi grupul generator *G*, se conţine în calitate de subgrup grupul $G^{(W_1)}$, unde $W_1 = DiagW \cong P$ este determinat de acelaşi grup iniţial de substituţii *P*. Vom menţiona că grupul $G^{(W_1)}$ formal nu se deosebeşte de grupurile majore de $P-$simetrie Zamorzaev cu grupul de definire *P* şi grupul generator *G*.

Grupul major de W_p – simetrie $G^{(W_p)}$ cu grupul generator G şi grupul iniţial de substituţii *P* finite se construieşte în formă de torsificare standard directă de stânga, efectuând următorii paşi:

a) se construiește produsul direct *W* al cópiilor izomorfe ale grupului P, indexate sus în dreapta cu câte un element din grupul generator G;

b) se construiesc și se descriu toate automorfismele $\overleftarrow{g}$ ale grupului W, generate de înmulțirea la stânga a lui G cu fiecare element al său g;

c) se combină în perechi fiecare element *g* din grupul *G* cu fiecare element *w* din grupul W: $g^{(w)} = gw$;

d) în mulțimea de perechi obținută se introduce legea de compoziție $g_i^{(w_i)} * g_j^{(w_j)} = g_k^{(w_k)}$, unde $g_k = g_i g_j$, $w_k = w_i^{g_j} w_j = \overleftarrow{g_j}(w_i)w_j$, iar $w_i^{g_j} =< ..., p_i^{g_j g_k}, ... >$; adică, $w_i^{g_j}(g_k) = w_i(g_j g_k)$.

Vom nota grupul major $G^{(W_p)}$ de W_p -simetrie cu grupul generator G şi grupul iniţial de substituţii *P* cu ajutorul unuia dintre simbolurile $\overleftarrow{G}\ Wr\ P$ sau $\overleftarrow{G} \leftthreetimes W$.

Vom analiza în detalii un singur exemplu, folosindu-ne de simbolica lui Șubnikov pentru grupurile punctuale. Fie $P = \{e, p = (12)\} \cong 2$ (grup ciclic de ordinul 2), iar $G = 6$ (grup ciclic de simetrie clasică de ordinul 6). Deci, $G = (1, 6, 3, 2, 3^{-1}, 6^{-1})$, iar $W = P^1 \times P^6 \times P^3 \times P^2 \times P^{3^{-1}} \times P^{6^{-1}}$. Acțiunea automorfismelor neidentice $\overleftarrow{g_J}$ asupra grupului W o vom prezenta în formă de substituții ale factorilor direcți P^{g_i}, scrise cu ajutorul ciclurilor: $\overleftarrow{6}$: $(P^1P^6P^3P^2P^{3^{-1}}P^{6^{-1}})$, $\overleftarrow{3}$: $(P^1P^3P^{3^{-1}})(P^6P^2P^{6^{-1}})$, $\overleftarrow{2}$: $(P^1P^2)(P^6P^{3^{-1}})(P^3P^{6^{-1}})$, $\overleftarrow{3^{-1}}$: $(P^1P^{3^{-1}}P^3)(P^2P^6P^{6^{-1}})$ și $\overleftarrow{6^{-1}}$: $(P^1P^{6^{-1}}P^{3^{-1}}P^2P^3P^6)$. Cu alte cuvinte, dacă $w =< r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 >$, atunci $w^6 =< r_6, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 >$, $w^3 =< r_5, r_6, r_1, r_2, r_3, r_4 >$, $w^2 =< r_4, r_5, r_6, r_1, r_2, r_3 >$, $w^{3^{-1}} =< r_3, r_4, r_5, r_6, r_1, r_2 >$ și, respectiv, $w^{6^{-1}} =< r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_1 >$. Grupul de substituții „generalizate" W are ordinul $|W| = |P|^{|G|} = 2^6$ =64, iar grupul major obținut $G^{(W_p)}$ va avea ordinul $|G| \cdot |W|$=384 și simbolul $\overleftarrow{6}\ Wr\ 2$.

Este clar că din grupul inițial de substituții *P* concret dat și grupul dat generator *G* poate fi dedus doar un singur grup major $G^{(W_p)}$ de W_p -simetrie cu simbolul $\overleftarrow{G}\ Wr\ P$. Prin urmare, pentru cel mai simplu grup inițial de substituții $P = \{e, p = (12)\}$ din grupurile punctuale cristalografice de simetrie clasică de categoria G_{30} se vor deduce exact 32 de grupuri majore, iar din grupurile cristalografice de tablete G_{320} – 31 de grupuri majore.

6. Orice grup semimajor de W_p – simetrie $G^{(W_p)}$ cu grupul generator finit G, cu grupul iniţial de substituţii *P*, tot finit, şi cu subgrupul W' al tuturor componentelor w din elementele $g^{(w)}$ ale grupului $G^{(W_p)}$, se deduce din grupurile G şi P efectuând următorii paşi:

a) se construieşte produsul direct W al cópiilor izomorfe ale grupului P, indexate sus în dreapta cu câte un element din grupul generator G;

b) se construiesc şi se descriu toate automorfismele $\overleftarrow{g}$ ale grupului W, generate de înmulţirea la stânga a lui G cu fiecare element al său g;

c) se găsesc în grupul W toate subgrupurile netriviale W' ce verifică condiția $\overleftarrow{g}(W') = W'$ (condiție necesară și suficientă pentru acest tip de grupuri) pentru orice element g din grupul generator G;

d) se combină în perechi fiecare element g din grupul G cu fiecare element w din subgrupul W': $g^{(w)} = gw$;

e) în mulţimea de perechi obţinută se introduce legea de compoziţie $g_i^{(w_i)} * g_j^{(w_j)} = g_k^{(w_k)}$, unde $g_k = g_i g_j$, $w_k = w_i^{g_j} w_j$, iar $w_i^{g_j} =< \ldots, p_i^{g_j g_k}, \ldots >$; adică, $w_i^{g_j}(g_k) = w_i(g_j g_k)$.

Pentru grupul semimajor $G^{(W_p)}$ de W_p – simetrie cu grupul generator G, grupul iniţial de substituţii *P* şi subgrupul W' de substituții „generalizate" se propune să se folosească simbolul $G^{(W_p)} = \overleftarrow{G} \leftthreetimes W'$.

Vom analiza în detalii câteva exemple concrete de deducere a grupurilor semimajore pentru grupul inițial de substituții $P = \{e, p = (12)\} \cong 2$, începând cu grupurile generatoare ciclice (mai simple) și folosindu-ne de simbolica lui Șubnikov pentru grupurile generatoare de categoriile G_{30} și G_{320}.

1) Vom considera grupul ciclic de ordinul 2 $G = (1, 2)$ în calitate de grup generator. Prin urmare, $W = P^1 \times P^2$, iar acțiunea automorfismului neidentic $\overleftarrow{g_2}$ asupra grupului W la nivelul factorilor direcți P^{g_i} poate fi prezentată în următoarea formă: $\overleftarrow{2}$: (P^1P^2). Grupul W are următoarele elemente: $w_0 =< e, e >$, $w_1 =< p, e >$, $w_2 =< e, p >$ și $w_3 =< p, p >$. La nivelul elementelor grupului W acțiunea automorfismului neidentic $\overleftarrow{g_2}$ o vom prezenta în forma $\overleftarrow{2}$: $(w_0)(w_1w_2)(w_3)$. Este evident că condiția necesară și suficientă $\overleftarrow{g}(W') = W'$ este satisfăcută numai de subgrupul netrivial $W_1' = DiagW = (w_0, w_3)$, iar subgrupurile $W_2' = (w_0, w_1)$ și $W_3' = (w_0, w_2)$ se aplică unul pe celălalt. Ca rezultat, se obține numai un grup semimajor cu simbolul $G_1^{(W_p)} = \overleftarrow{2} \leftthreetimes W_1'$. Vom menționa că grupul semimajor obținut formal nu se deosebește de grupul respectiv de $P-$ simetrie Zamorzaev.

2) Grupul generator este de ordinul 3, adică $G = (1, 3, 3^{-1})$. Deci, $W = P^1 \times P^3 \times P^{3^{-1}}$, iar acțiunea automorfismelor neidentice $\overleftarrow{g_i}$ asupra grupului W la nivelul factorilor direcți P^{g_i} poate fi prezentată în următoarea formă: $\overleftarrow{3}$: $(P^1P^3P^{3^{-1}})$ și $\overleftarrow{3^{-1}}$: $(P^1P^{3^{-1}}P^3)$. Grupul W are următoarele elemente: $w_0 =< e, e, e >$, $w_1 =< e, e, p >$, $w_2 =< e, p, e >$, $w_3 =< p, e, e >$, $w_4 =< e, p, p >$, $w_5 =< p, e, p >$, $w_6 =< p, p, e >$ și $w_7 =< p, p, p >$. La nivelul elementelor grupului W acțiunea automorfismelor neidentice $\overleftarrow{g_i}$ o vom prezenta în forma următoare: $\overleftarrow{3}$: $(w_1w_3w_2)(w_4w_5w_6)$ și $\overleftarrow{3^{-1}}$: $(w_1w_2w_3)(w_4w_6w_5)$. Nemijlocit se verifică că condiția necesară și suficientă $\overleftarrow{g}(W') = W'$ este satisfăcută numai de următoarele subgrupuri: a) din 7 subgrupuri de ordinul 2 numai $W_1' = DiagW = (w_0, w_7)$; b) dintre subgrupurile de ordinul 4 (în total sunt 7 și toate sunt neciclice) numai $W_2' = (w_0, w_4, w_5, w_6)$. Drept rezultat, se obțin numai 2 grupuri semimajore cu simbolurile $G_1^{(W_p)} = \overleftarrow{3} \leftthreetimes W_1'$ și, respectiv, $G_2^{(W_p)} = \overleftarrow{3} \leftthreetimes W_2'$.

3) În calitate de grup generator vom considera grupul ciclic de ordinul 4, adică $G = (1, 4, 2, 4^{-1})$. Prin urmare, $W = P^1 \times P^4 \times P^2 \times P^{4^{-1}}$, iar acțiunea automorfismelor neidentice $\overleftarrow{g_j}$ asupra grupului W la nivelul factorilor direcți P^{g_i} poate fi prezentată în următoarea formă: $\overleftarrow{4}$: $(P^1P^4P^2P^{4^{-1}})$, $\overleftarrow{2}$: $(P^1P^2)(P^4P^{4^{-1}})$ și $\overleftarrow{4^{-1}}$: $(P^1P^{4^{-1}}P^2P^4)$. Vom enumera toate cele 16 elemente ale grupului W: $w_0 =< e, e, e, e >$, $w_1 =< p, e, e, e >$, $w_2 =< e, p, e, e >$, $w_3 =< e, e, p, e >$, $w_4 =< e, e, e, p >$, $w_5 =< p, p, e, e >$, $w_6 =< p, e, p, e >$, $w_7 =< p, e, e, p >$, $w_8 =< e, p, p, e >$, $w_9 =< e, p, e, p >$, $w_{10} =< e, e, p, p >$, $w_{11} =< p, p, p, e >$, $w_{12} =< p, p, e, p >$, $w_{13} =< p, e, p, p >$, $w_{14} =< e, p, p, p >$, $w_{15} =< p, p, p, p >$. La nivelul elementelor grupului W acțiunea fiecărui automorfism neidentic $\overleftarrow{g_j}$ o vom prezenta în următoarea formă: $\overleftarrow{4}$: $(w_1w_2w_3w_4)(w_{11}w_{14}w_{13}w_{12})(w_5w_8w_{10}w_7)(w_6w_9)$, $\overleftarrow{4^{-1}}$: $(w_1w_4w_3w_2)(w_{11}w_{12}w_{13}w_{14})(w_5w_7w_{10}w_8)(w_6w_9)$ și $\overleftarrow{2}$: $(w_1w_3)(w_2w_4)(w_{11}w_{13})(w_{14}w_{12})(w_5w_{10})(w_8w_7)$.

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2017, nr.2(102)
Seria "Științe exacte și economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.3-12

Nemijlocit se verifică că condiția necesară și suficientă $\bar{g}(W') = W'$ este satisfăcută numai de următoarele subgrupuri: a) din 15 subgrupuri de ordinul 2 numai $W_1' = DiagW = (w_0, w_{15})$; b) dintre subgrupurile de ordinul 4 (în total 7 și toate neciclice) numai $W_2' = (w_0, w_{15}, w_6, w_9)$; c) dintre subgrupurile de ordinul 8 numai subgrupul $W_3' = (w_0, w_{15}, w_6, w_9, w_5, w_7, w_8, w_{10})$. Ca rezultat, se obțin numai 3 grupuri semimajore cu următoarele simboluri: $G_1^{(W_p)} = \overleftarrow{4} \ltimes W_1'$, $G_2^{(W_p)} = \overleftarrow{4} \ltimes W_2'$, și, respectiv, $G_3^{(W_p)} = \overleftarrow{4} \ltimes W_3'$.

4) Considerăm grupul generator $G = (1, 6, 3, 2, 3^{-1}, 6^{-1})$. Deci, $W = P^1 \times P^6 \times P^3 \times P^2 \times P^{3^{-1}} \times P^{6^{-1}}$, iar acțiunea automorfismelor neidentice $\overleftarrow{g_j}$ asupra grupului W la nivelul factorilor direcți P^{g_i} va fi: $\overleftarrow{6}$: $(P^1P^6P^3P^2P^{3^{-1}}P^{6^{-1}})$, $\overleftarrow{3}$: $(P^1P^3P^{3^{-1}})(P^6P^2P^{6^{-1}})$, $\overleftarrow{2}$: $(P^1P^2)(P^6P^{3^{-1}})(P^3P^{6^{-1}})$, $\overleftarrow{3^{-1}}$: $(P^1P^{3^{-1}}P^3)(P^2P^6P^{6^{-1}})$ și $\overleftarrow{6^{-1}}$: $(P^1P^{6^{-1}}P^{3^{-1}}P^2P^3P^6)$. Cu alte cuvinte, dacă $w =< r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 >$, atunci $w^6 =< r_6, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 >$, $w^3 =< r_5, r_6, r_1, r_2, r_3, r_4 >$, $w^2 =< r_4, r_5, r_6, r_1, r_2, r_3 >$, $w^{3^{-1}} =< r_3, r_4, r_5, r_6, r_1, r_2 >$ și, respectiv, $w^{6^{-1}} =< r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_1 >$.

Conform algoritmului de deducere a grupurilor semimajore de W_p – simetrie în grupul de „substituții" generalizate trebuie să găsim toate subgrupulile W' ce verifică condiția $\bar{g}(W') = W'$. Pentru a găsi aceste subgrupuri, suntem nevoiți să analizăm acțiunea automorfismelor $\overleftarrow{g_j}$, unde $g_j \in G = 6$, asupra tuturor celor 64 de elemente concrete ale grupului $W = P^1 \times P^6 \times P^3 \times P^2 \times P^{3^{-1}} \times P^{6^{-1}}$. Subgrupuri în W sunt foarte multe, dar numai 3 din ele verifică condiția $\bar{g}(W') = W'$, și anume: $W_1' = (< e, e, e, e, e, e >, < p, p, p, p, p, p >)$, $W_2' = (< e, e, e, e, e, e >, < p, p, p, p, p, p >, < p, e, p, e, p, e >, < e, p, e, p, e, p >)$, și $W_3' = (< e, e, e, e, e, e >, < p, p, e, p, p, e >, < p, e, p, p, e, p >, < e, p, p, e, p, p >)$. Grupurile semimajore obținute pot fi prezentate cu ajutorul simbolurilor: $G_1^{(W_p)} = \overleftarrow{6} \ltimes W_1'$, $G_2^{(W_p)} = \overleftarrow{6} \ltimes W_2'$, și, respectiv, $G_3^{(W_p)} = \overleftarrow{6} \ltimes W_3'$.

5) În calitate de grup generator vom considera un grup neciclic de ordinul 4, anume: $G = 2{:}2 = (1, 2_1, 2_2, 2_3)$. Prin urmare, $W = P^1 \times P^{2_1} \times P^{2_2} \times P^{2_3}$, iar acțiunea automorfismelor neidentice $\overleftarrow{g_j}$ asupra grupului W la nivelul factorilor direcți P^{g_i} o vom prezenta în următoarea formă: $\overleftarrow{2_1}$: $(P^1P^{2_1})(P^{2_2}P^{2_3})$, $\overleftarrow{2_2}$: $(P^1P^{2_2})(P^{2_1}P^{2_3})$ și 2_3: $(P^1P^{2_3})(P^{2_1}P^{2_2})$. Vom enumera toate cele 16 elemente ale grupului W: $w_0 =< e, e, e, e >$, $w_1 =< p, e, e, e >$, $w_2 =< e, p, e, e >$, $w_3 =< e, e, p, e >$, $w_4 =< e, e, e, p >$, $w_5 =< p, p, e, e >$, $w_6 =< p, e, p, e >$, $w_7 =< p, e, e, p >$, $w_8 =< e, p, p, e >$, $w_9 =< e, p, e, p >$, $w_{10} =< e, e, p, p >$, $w_{11} =< p, p, p, e >$, $w_{12} =< p, p, e, p >$, $w_{13} =< p, e, p, p >$, $w_{14} =< e, p, p, p >$, $w_{15} =< p, p, p, p >$. La nivelul elementelor grupului W acțiunea fiecărui automorfism neidentic $\overleftarrow{g_j}$ poate fi prezentă în forma următoare:
$\overleftarrow{2_1}$: $(w_1w_2)(w_3w_4)(w_6w_9)(w_7w_8)(w_{11}w_{12})(w_{13}w_{14})$, $\overleftarrow{2_2}$: $(w_1w_3)(w_4w_2)(w_5w_{10})(w_7w_8)(w_{11}w_{13})(w_{12}w_{14})$ și $\overleftarrow{2_3}$: $(w_1w_4)(w_2w_3)(w_5w_{10})(w_6w_9)(w_{11}w_{14})(w_{13}w_{12})$. Nemijlocit se verifică că condiția necesară $\bar{g}(W') = W'$ este satisfăcută numai de următoarele subgrupuri: a) din 15 subgrupuri de ordinul 2 numai $W_1' = DiagW = (w_0, w_{15})$; b) dintre subgrupurile de ordinul 4 numai 3 subgrupuri, și anume: $W_2' = (w_0, w_{15}, w_7, w_8)$, $W_3' = (w_0, w_{15}, w_5, w_{10})$ și $W_4' = (w_0, w_{15}, w_6, w_9)$; c) dintre subgrupurile de ordinul 8 numai subgrupul $W_5' = (w_0, w_{15}, w_6, w_9, w_5, w_7, w_8, w_{10})$. Ca rezultat, se obțin 5 grupuri W' – semimajore cu următoarele simboluri: $G_1^{(W_p)} = \overleftarrow{2{:}2} \ltimes W_1'$, $G_2^{(W_p)} = \overleftarrow{2{:}2} \ltimes W_2'$, $G_3^{(W_p)} = \overleftarrow{2{:}2} \ltimes W_3'$, $G_4^{(W_p)} = \overleftarrow{2{:}2} \ltimes W_4'$ și respectiv $G_5^{(W_p)} = \overleftarrow{2{:}2} \ltimes W_5'$.

7. Orice grup semiminor (respectiv, pseudominor) de W_p -simetrie $G^{(W_p)}$ cu grupul generator finit G, cu grupul inițial de substituții P, tot finit, și cu subgrupul W' (respectiv, submulțimea cu unitate W', care nu este subgrup) al tuturor componentelor w din elementele $g^{(w)}$ ale grupului $G^{(W_p)}$ se deduce din grupurile G și P efectuând următorii pași:

a) se construiește produsul direct W al copiilor izomorfe ale grupului P, indexate sus în dreapta cu câte un element din grupul generator G;

b) se construiesc și se descriu toate automorfismele $\bar{g}$ ale grupului W generate de înmulțirea la stânga a lui G cu fiecare element al său g;

c) se găsesc în grupul W toate subgrupurile netriviale W' (respectiv, submulțimile cu unitate W', care nu sunt subgrupuri) ce verifică condiția $\bar{g}(W')W' = W'$ (condiție necesară, dar nu și suficientă pentru aceste tipuri de grupuri) pentru orice element g din grupul generator G;

d) se descompune grupul G în clase de resturi de dreapta în raport cu subgrupul său H (indicele lui H în G este egal cu $|W'|$) şi se stabileşte aşa o corespondenţă biunivocă μ între descompunerea dată şi W' care în calitate de aplicaţie a grupului G pe W', conform regulii $\mu(g_i) = w_i$, ar fi cvasiomomorfism exact natural de stânga cu nucleul H;

e) se stabilesc în calitate de componente ale transformării $g^{(w)}$ elementele din grupul G şi subgrupul W' (respectiv, submulțimea cu unitate W', care nu este subgrup) ce corespund unul altuia după μ: $g^{(w)} = gw$, unde $w = \mu(g)$;

f) în mulțimea de perechi obținută se introduce legea de compoziție $g_i^{(w_i)} * g_j^{(w_j)} = g_k^{(w_k)}$, unde $g_k = g_i g_j$, $w_k = w_i^{g_j} w_j$, iar $w_i^{g_j} =<..., p_i^{g_j g_k},...>$; adică, $w_i^{g_j}(g_k) = w_i(g_j g_k)$.

Pentru grupurile semiminore și cele pseudominore $G^{(W_p)}$ de W_p-simetrie cu grupul generator G, grupul iniţial de substituţii P şi subgrupul W' (respectiv, submulţimea cu unitate W', care nu este subgrup) de substituții „generalizate" se propune să se folosească un simbol mai complex (cu mai mulţi termeni): $\overleftarrow{G}/(P|W'|W_1;\ G_1/H'/H)$. Menționăm că în acest caz: 1) G este grupul generator pentru $G^{(W_p)}$; 2) P este grupul iniţial de substituţii; 3) W' este mulţimea substituţiilor „generalizate" ce intră în calitate de componente în $g^{(w)} \in G^{(W_p)}$, unde $w_0 \subset W' \subseteq W = \overline{\Pi}_{g_i \in G} P^{g_i}$; 4) H este subgrupul de simetrie pentru $G^{(W_p)}$ ($H = G^{(W_p)} \cap G$); 5) $G_1/H'/H$ este simbolul cu trei componente al subgrupului $G_1^{(W_1)}$ de P-simetrie, adică, $G_1/H \cong W_1$, unde $W_1 = \left\{ w \middle| g^{(w)} \in G_1^{(W_1)} \right\} \subset W'$ şi $W_1 \leq DiagW$.

Vom analiza în detalii numai acele exemple concrete de deducere a grupurilor semiminore și pseudominore pentru grupul inițial de substituții $P = \{e, p = (12)\} \cong 2$, pentru care grupurile generatoare sunt cele analizate mai sus pentru deducerea și descrierea grupurilor semimajore.

1) Fie $G = (1, 2)$. Grupul W are 3 subgrupuri netriviale W' de ordinul 2, dintre care numai $W_1' = DiagW = (w_0, w_3)$ verifică condiția $\overleftarrow{g}(W')W' = W'$. Ca urmare, există un singur grup semiminor cu simbolul $\overleftarrow{2}/(2|W_1'|W_1';2/1/1)$ cu structura concretă pe elemente $G^{(W_p)} = (1w_0, 2w_3)$. Vom menționa că grupul obținut formal nu se deosebește de grupul minor de P −simetrie cu structura $G^{(P)} = (1e, 2p)$, care are simbolul binomial $2/1$. Evident că în acest caz nu există grupuri pseudominore.

2) Grupul generator este $G = (1, 3, 3^{-1})$. Deci, $W = P^1 \times P^3 \times P^{3^{-1}}$ are elementele: $w_0 =< e, e, e >$, $w_1 =< e, e, p >$, $w_2 =< e, p, e >$, $w_3 =< p, e, e >$, $w_4 =< e, p, p >$, $w_5 =< p, e, p >$, $w_6 =< p, p, e >$ și $w_7 =< p, p, p >$. Acțiunea automorfismelor neidentice $\overleftarrow{g_i}$ asupra elementelor din W este următoarea: $\overleftarrow{3}$: $(w_1 w_3 w_2)(w_4 w_5 w_6)$ și $\overleftarrow{3^{-1}}$: $(w_1 w_2 w_3)(w_4 w_6 w_5)$. Nemijlocit se verifică că condiția necesară $\overleftarrow{g}(W')W' = W'$ este satisfăcută numai de următoarele subgrupuri: a) din 7 subgrupuri de ordinul 2 numai $W_1' = DiagW = (w_0, w_7)$; b) din 7 subgrupuri de ordinul 4 numai $W_2' = (w_0, w_4, w_5, w_6)$. Însă, deoarece pentru grupurile semiminore și pseudominore $|W'|$ trebuie să fie un divizor al lui $3 = |G|$, urmează că grupuri W' −simiminore pur și simplu nu există.

În calitate de nucleu $Ker\mu$ al cvasiomomorfismului de stânga natural exact μ al grupului G în grupul W poate servi doar subgrupul H de indicele 3 în G, adică $H = 1$. Prin urmare, pentru deducerea grupurilor pseudominore de W_p-simetrie cu grupul generator $G = 3$, vom studia doar acele submulţimi cu unitate W', pentru care $|W'| = 3$.

Fie $H = 1$. Atunci $W' = (w_0, w_1, w_2)$, unde $w_0 =< e^1, e^3, e^{3^{-1}} >$, iar structura concretă a elementelor w_i ($i = 1, 2$) o vom determina reieşind din condiţia că aplicaţia μ a grupului G pe W', conform regulii $\mu(1) = w_0$, $\mu(3) = w_1$, $\mu(3^{-1}) = w_2$, să fie cvasiomomorfism de stânga natural exact. Observăm că w_0 are ordinul 1, iar celelalte două elemente au ordinul 2. Mai mult decât atât, din $\mu(3) = w_1$ și $\mu(3^{-1}) = w_2$ obţinem

$\mu(3\cdot 3)=w_1^3 w_1 = w_2 = \mu(3^{-1})$ şi $\mu(3^{-1}\cdot 3^{-1}) = w_2^{3^{-1}} w_2 = w_1 = \mu(3)$. Deoarece sunt verificate egalităţile $\mu(3\cdot 3^{-1}) = w_1^{3^{-1}} w_2 = w_1^{3^{-1}} w_1^3 w_1 = w_0 = \mu(1)$ şi $\mu(3^{-1}\cdot 3) = w_2^3 w_1 = w_0 = \mu(1)$, se obţine $w_1^{3^{-1}} w_2 = w_2^3 w_1$.

Fie $w_1 =< q_1, q_2, q_3 >$ şi $w_2 =< r_1, r_2, r_3 >$. Atunci se obţin următoarele rezultate: $w_1^{3^{-1}} =< q_2, q_3, q_1 >$, $w_1^3 =< q_3, q_1, q_2 >$ şi $w_1^3 w_1 =< q_3q_1, q_1q_2, q_2q_3 >$. Din egalitatea $w_1^3 w_1 = w_2$ urmează egalităţile: $r_1 = q_3 q_1$, $r_2 = q_1 q_2$, $r_3 = q_2 q_3$. Din faptul că $w_1^{3^{-1}} w_1^3 w_1 = w_0$ urmează rezultatul: $q_1 q_2 q_3 = e$. Sunt posibile următoarele trei variante: 1) $w_1 =< e, p, p >$, iar $w_2 =< p, p, e >$; 2) $w_1 =< p, e, p >$, iar $w_2 =< e, p, p >$; 3) $w_1 =< p, p, e >$, iar $w_2 =< p, e, p >$.

În rezultat obţinem 3 submulţimi W_i' $(i=\overline{1,3})$, care ne dau 3 grupuri pseudominore de W_p-simetrie: $W_1' = (w_0, w_1 =< e, p, p >, w_2 =< p, p, e >)$, $W_2' = (w_0, w_1 =< p, e, p >, w_2 =< e, p, p >)$ şi $W_3' = (w_0, w_1 =< p, p, e >, w_2 =< p, e, p >)$. Simbolurile grupurilor pseudominore obţinute sunt $\overleftarrow{3}/(2|W_i'|w_0; 1/1/1)$, unde $i=\overline{1,3}$.

3) Vom analiza cazul când grupul generator este $G = (1, 4, 2, 4^{-1})$. Prin urmare, $W = P^1 \times P^4 \times P^2 \times P^{4^{-1}}$, iar acțiunea automorfismelor neidentice $\overleftarrow{g_j}$ asupra grupului W la nivelul factorilor direcți P^{g_i} este sub următoarea formă: $\overleftarrow{4}$: $(P^1P^4P^2P^{4^{-1}})$, $\overleftarrow{2}$: $(P^1P^2)(P^4P^{4^{-1}})$ și $\overleftarrow{4^{-1}}$: $(P^1P^{4^{-1}}P^2P^4)$. Cele 16 elemente ale grupului W sunt: $w_0 =< e,e,e,e >$, $w_1 =< p,e,e,e >$, $w_2 =< e,p,e,e >$, $w_3 =< e,e,p,e >$, $w_4 =< e,e,e,p >$, $w_5 =< p,p,e,e >$, $w_6 =< p,e,p,e >$, $w_7 =< p,e,e,p >$, $w_8 =< e,p,p,e >$, $w_9 =< e,p,e,p >$, $w_{10} =< e,e,p,p >$, $w_{11} =< p,p,p,e >$, $w_{12} =< p,p,e,p >$, $w_{13} =< p,e,p,p >$, $w_{14} =< e,p,p,p >$, $w_{15} =< p,p,p,p >$.

Pentru grupurile semiminore și pseudominore de W_p-simetrie totalitatea W' (în general, submulțime cu unitatea grupului W) trebuie să verifice următoarele condiții: $w_0 \in W' \subset W$, $|W'|$ este un divizor al lui $|G|$ și $\tilde{g}(W')W' = W'$. Pentru cazul analizat $|G| = 4$, deci $|W'|$ poate primi valoarea 2 sau 4. Ca să găsim W' ce verifică condiția $\tilde{g}(W')W' = W'$, mai întâi trebuie să clarificăm cum acționează fiecare automorfism $\tilde{g}$ asupra elementelor concrete din W.

În calitate de nucleu $Ker\mu$ al cvasiomomorfismului de stânga natural exact μ al grupului $G = 4$ în grupul W pot servi doar subgrupurile: a) H de indicele 4 în G, adică $H = 1$; b) respectiv de indicele 2 în G, adică $H = 2$. Deoarece toate elementele grupului W sunt de ordinul 2, apoi toate submulțimile W' cu unitate, care conțin numai 2 elemente, sunt subgrupuri. Nemijlocit se verifică că numai $W' = (w_0, w_{15})$ verifică condiția $\tilde{g}(W')W' = W'$. Grupul semiminor ce se obține are simbolul polinomial $\overleftarrow{4}/(2|W'|W'; 4/2/2)$ și formal nu se deosebește de grupul de $P-$simetrie cu structura concretă $G^{(P)} = (1e, 2e, 4p, 4^{-1}p)$.

Vom analiza acum cazul când $|W'| = 4$, adică $H = 1$. Fie $W' = (w_0, w_1, w_2, w_3,)$, unde $w_0 =< e,e,e,e >$, iar structura concretă a elementelor w_i $(i=1,2,3)$ o vom determina reieşind din condiţia că aplicaţia μ a grupului G pe W', conform regulii $\mu(1) = w_0$, $\mu(4) = w_1$, $\mu(2) = w_2$ și $\mu(4^{-1}) = w_3$, să fie cvasiomomorfism de stânga natural exact. Vom obține $\mu(4\cdot 4) = w_1^4 w_1 = w_2 = \mu(2)$, $\mu(4\cdot 2) = w_1^2 w_2 = w_3 = \mu(4^{-1})$, $\mu(2\cdot 2) = w_2^2 w_2 = (w_1^4 w_1)^2 (w_1^4 w_1) = w_0 = \mu(1)$, și $\mu(2\cdot 4) = w_2^4 w_1 = w_3 = \mu(4^{-1})$. Deci, se obține relația $w_1^{4^{-1}} w_1^2 w_1^4 w_1 = w_0$. Notând $w_1 =< r_1, r_2, r_3, r_4 >$, vom avea: $w_1^4 =< r_1, r_2, r_3, r_4 >^4 =< r_4, r_1, r_2, r_3 >$, $w_1^2 =< r_3, r_4, r_1, r_2 >$ și $w_1^{4^{-1}} =< r_1, r_2, r_3, r_4 >^{4^{-1}} =< r_2, r_3, r_4, r_1 >$. Înlocuind ultimele relații în $w_1^{4^{-1}} w_1^2 w_1^4 w_1 = w_0$ se obține că produsul componentelor r_1, r_2, r_3, r_4 este egal cu unitatea e a grupului inițial P. Sunt posibile două subcazuri: a) două componente sunt egale cu e, iar celelalte două sunt egale cu p; b) toate componentele sunt egale cu p. Se obțin următoarele rezultate concrete: a) un singur subgrup $W_1' = (w_0, w_1 =< p,e,p,e >$, $w_2 =< p,p,p,p >, w_3 =< e,p,e,p >)$; b) 4 submulțimi $W_2' = (w_0$, $w_1 =< p,p,e,e >$, $w_2 =< p,e,p,e >$ $w_3 =< p,e,e,p >)$, $W_3' = (w_0, w_1 =< e,e,p,p >$, $w_2 =< p,e,p,e >$, $w_3 =< e,p,p,e >)$, $W_4' = (w_0$, $w_1 =< p,e,e,p >, w_2 =< e,p,e,p >, w_3 =< e,e,p,p >)$, $W_5' = (w_0$, $w_1 =< e,p,p,e >$, $w_2 =< e,p,e,p >$, $w_3 =< p,p,e,e >)$. Ca rezultat se obțin: a) un grup semiminor cu simbolul $\overleftarrow{4}/(2|W_1'|W_6'; 2/1/1)$, unde $W_6' = (w_0$, $w =< p,p,p,p >)$; 4 grupuri pseudominore cu simbolurile polinomiale $\overleftarrow{4}/(2|W_i'|w_0; 1/1/1)$, unde $i = 2,3,4,5$.

4) Grupul generator este $G=(1,6,3,2,3^{-1},6^{-1})$. Deci, $W=P^1\times P^6\times P^3\times P^2\times P^{3^{-1}}\times P^{6^{-1}}$, iar acţiunea automorfismelor neidentice $\overleftarrow{g_i}$ asupra grupului W la nivelul factorilor direcţi P^{g_i} poate fi prezentată astfel: $\overleftarrow{6}$: $(P^1P^6P^3P^2P^{3^{-1}}P^{6^{-1}})$, $\overleftarrow{3}$: $(P^1P^3P^{3^{-1}})(P^6P^2P^{6^{-1}})$, $\overleftarrow{2}$: $(P^1P^2)(P^6P^{3^{-1}})(P^3P^{6^{-1}})$, $\overleftarrow{3^{-1}}$: $(P^1P^{3^{-1}}P^3)(P^2P^6P^{6^{-1}})$ şi $\overleftarrow{6^{-1}}$: $(P^1P^{6^{-1}}P^{3^{-1}}P^2P^3P^6)$. Cu alte cuvinte, dacă $w=<r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,r_6>$, atunci $w^6=<r_6,r_1,r_2,r_3,r_4,r_5>$, $w^3=<r_5,r_6,r_1,r_2,r_3,r_4>$, $w^2=<r_4,r_5,r_6,r_1,r_2,r_3>$, $w^{3^{-1}}=<r_3,r_4,r_5,r_6,r_1,r_2>$ şi, respectiv, $w^{6^{-1}}=<r_2,r_3,r_4,r_5,r_6,r_1>$. Pentru grupurile W'-semiminore şi, respectiv, W'-pseudominore cu grupul generator G trebuie ca $|W'|$ să fie un divizor al lui $|G|$. Prin urmare, trebuie analizate toate cazurile posibile: a) $|W'|=2$; b) $|W'|=3$ şi c) $|W'|=6$.

a) Fie $|W'|=2$. Orice submulţime W' cu unitatea w_0, ce conţine numai 2 elemente, este subgrup în W. Din 63 de subgrupuri W' de ordinul 2 din W numai $W'=DiagW=(w_0=<e,e,e,e,e,e>,w_{63}=<p,p,p,p,p,p>)$ verifică condiţia necesară $\overleftarrow{g}(W')W'=W'$ de existenţă a grupurilor de W_p -simetrie. Grupul W' −semiminor ce se obţine are simbolul $\overleftarrow{6}/(2|W'|W';6/3/3)$ şi formal coincide cu grupul minor de P-simetrie cu simbolul binomial 6/3 care are structura concretă $G^{(P)}=(1e,3e,3^{-1}e,2p,6p,6^{-1}p)$.

b) Fie $|W'|=3$. Deci, $H=2$. Deoarece 3=$|W'|$ nu este un divizor al lui 64=$|W|$, apoi nu există subgrupuri W' de ordinul 3 în W. Ca rezultat, nu există grupuri W'-semiminore cu condiţia $|W'|=3$ elemente. Acum vom deduce şi vom descrie grupurile W'-pseudominore. Deoarece $H=2$, apoi $W'=(w_0,w_1,w_2,)$, unde w_0 este unitatea grupului W, iar structura concretă a elementelor w_i, unde $i=1,2$, o vom determina reieşind din condiţia că aplicaţia μ cu nucleul $H=2$ a grupului G pe W' să fie cvasiomomorfism de stânga natural exact. Descompunerea grupului generator în clase de resturi în raport cu subgrupul său de indicele 3 are forma: $6=(1,2)\cup(3^{-1},6)\cup(3,6^{-1})$.

Fie $\mu(1)=w_0$, $\mu(2)=w_0$, $\mu(6)=w_1$, $\mu(3^{-1})=w_1$, $\mu(6^{-1})=w_2$ şi $\mu(3)=w_2$. Din $\mu(6)=w_1$ vom obţine $\mu(6\cdot 6)=w_1^6w_1=\mu(3)=w_2$. Pe de altă parte, vom avea că $\mu(3^{-1}\cdot 2)=w_1^2w_0=w_1=\mu(6)$, iar $\mu(6\cdot 6^{-1})=w_1^{6^{-1}}w_2=w_1^{6^{-1}}w_1^6w_1=\mu(1)$. Având $w_1=<r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,r_6>$, din egalităţile $w_1^{6^{-1}}w_1^6w_1=w_0$ şi $w_1^2=w_1$ urmează că $r_1=r_4$, $r_2=r_5$, $r_3=r_6$ şi $r_1r_3r_5=e$, $r_2r_4r_6=e$. Deci, în fiecare produs unul dintre factori este egal cu e, iar ceilalţi doi sunt egali cu p. În rezultat se obţin 3 submulţimi concrete: Anume: $W_1'=(w_0,w_1=<e,p,p,e,p,p>,w_2=<p,p,e,p,p,e>)$, $W_2'=(w_0,w_1=<p,e,p,p,e,p>,\ w_2=<e,p,p,e,p,p>)$ şi $W_3'=(w_0,w_1=<p,p,e,p,p,e,>,w_2=<p,e,p,p,e,p>)$.

Concluzie: există 3 grupuri W' −pseudominore cu grupul generator $G=6$ ce verifică condiţia $|W'|=3$. Grupurile obţinute au simbolurile $\overleftarrow{6}/(2|W_i'|w_0;2/2/2)$, unde $i=1,2,3$.

c) Fie $|W'|=6$. Deci, $H=1$. Deoarece 6=$|W'|$ nu este un divizor al lui 64=$|W|$, apoi nu există subgrupuri W' de ordinul 6 în W. Ca rezultat, nu există grupuri W'-semiminore cu condiţia $|W'|$=6. Acum vom deduce grupurile W'-pseudominore. Deoarece $H=1$, apoi $W'=(w_0,w_1,w_2,w_3,w_4,w_5)$, unde w_0 este unitatea grupului W, iar structura concretă a elementelor w_i, unde $i=1\div 5$, o vom determina reieşind din condiţia că aplicaţia μ a grupului G pe W', conform regulii $\mu(1)=w_0$, $\mu(6)=w_1$, $\mu(3)=w_2$, $\mu(2)=w_3$, $\mu(3^{-1})=w_4$ şi $\mu(6^{-1})=w_5$, să fie cvasiomomorfism de stânga natural exact. Din $\mu(6)=w_1$ obţinem $\mu(6\cdot 6)=w_1^6w_1=w_2=\mu(3)$ şi $\mu(3\cdot 6)=(w_1^6w_1)^6w_1=w_1^3{w_1}^6w_1=\mu(2)=w_3$, de unde urmează că $\mu(6\cdot 2)=\mu(3^{-1})=w_1^2w_1^3{w_1}^6w_1=w_4$. Mai mult decât atât, vom avea şi următoarele: $\mu(6^{-1})=\mu(6\cdot 3^{-1})$=$w_1^{3^{-1}}w_1^2w_1^3{w_1}^6w_1=w_5$, iar $\mu(6\cdot 6^{-1})$=$w_1^{6^{-1}}w_1^{3^{-1}}w_1^2w_1^3{w_1}^6w_1=w_0=\mu(1)$.

Dacă vom presupune că $w_1=<r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,r_6>$, atunci $w_1^6=<r_6,r_1,r_2,r_3,r_4,r_5>$, ${w_1}^3=<r_5,r_6,r_1,r_2,r_3,r_4>$, ${w_1}^2=<r_4,r_5,r_6,r_1,r_2,r_3>$, ${w_1}^{3^{-1}}=<r_3,r_4,r_5,r_6,r_1,r_2>$ şi, respectiv, ${w_1}^{6^{-1}}=<r_2,r_3,r_4,r_5,r_6,r_1>$. Prin urmare, toate componentele produsului $w_1^{6^{-1}}w_1^{3^{-1}}w_1^2w_1^3{w_1}^6w_1$ sunt egale cu $r_1r_2r_3r_4r_5r_6$=e. Sunt posibile următoarele subcazuri: a) toate componente în w_1 sunt egale cu p; b) 2 componente sunt egale cu e, iar 4 sunt egale cu p; c) 2 componente sunt egale cu p, iar 4 sunt egale cu e. Vom analiza succint fiecare subcaz.

a) Fie toate componente în w_1 sunt egale cu p. Nemijlocit se verifică că în acest caz $w_1=w_3=w_5=<p,p,p,p,p,p>$, iar $w_2=w_4=w_0$. Se repetă situaţia când $|W'|=2$.

b) Fie că 2 componente sunt egale cu e, iar 4 sunt egale cu p. Uşor se verifică că în grupul W există numai 3 aşa elemente: $w_1'=<e,p,p,e,p,p>$, $w_1''=<p,e,p,p,e,p>$ şi $w_1'''=<p,p,e,p,p,e>$. Fiecare dintre aceste elemente conduce la situația că $w_3 = w_0$, $w_4 = w_1$ și $w_5 = w_2$. Cu alte cuvinte, $H = 2$ și se repetă situația când $|W'| = 3$.

c) Fie că 2 componente sunt egale cu p, iar 4 sunt egale cu e. În rezultat se obțin 3 submulțimi concrete: Anume: $W_1' = (w_0, w_1 =< e,e,p,e,e,p >, w_2 =< p,e,p,p,e,p >, w_3 =< p,p,p,p,p,p >, w_4 =< p,p,e,p,p,e >, w_5 =< e,p,e,e,p,e >)$, $W_2' = (w_0, w_1 =< e,p,e,e,p,e >, w_2 =< e,p,p,e,p,p >, w_3 =< p,p,p,p,p,p >, w_4 =< p,e,p,p,e,p >, w_5 =< p,e,e,p,e,e >)$ și $W_1' = (w_0, w_1 =< p,e,e,p,e,e >, w_2 = < p,p,e,p,p,e >, w_3 =< p,p,p,p,p,p >, w_4 =< e,p,p,e,p,p >, w_5 =< e,e,p,e,e,p >)$. Vom menționa că în fiecare din submulțimile obținute se include subgrupul $W' = DiagW$, iar în fiecare din ele se include câte o submulțime W', obținute pentru cazul $|W'| = 3$. Concluzie: există 3 grupuri W' −pseudominore cu grupul generator $G = 6$ ce verifică condiția $|W'| = 6$. Grupurile obținute au simbolurile $\overleftarrow{6}/(2|W_i'|w_0; 2/1/1)$, unde $i = 1,2,3$, iar $W_4' = DiagW = (w_0, w_3)$.

5) Grupul generator este $G = 2:2 = (1, 2_1, 2_2, 2_3)$. Deci, $W = P^1 \times P^{2_1} \times P^{2_2} \times P^{2_3}$, iar acțiunea automorfismelor neidentice $\overleftarrow{g_i}$ asupra grupului W la nivelul factorilor direcți P^{g_i} poate fi prezentată în modul următor: $\overleftarrow{2_1}$: $(P^1P^{2_1})(P^{2_2}P^{2_3})$, $\overleftarrow{2_2}$: $(P^1P^{2_2})(P^{2_1}P^{2_3})$ și $\overleftarrow{2_3}$: $(P^1P^{2_3})(P^{2_1}P^{2_2})$. Fie $W' = (w_0, w_1, w_2, w_3)$, unde $w_0 =< e,e,e,e >$, iar structura concretă a elementelor w_i $(i = 1,2,3)$ o vom determina reieşind din condiţia că aplicaţia μ a grupului G pe W', conform regulii $\mu(1) = w_0$, $\mu(2_1) = w_1$, $\mu(2_2) = w_2$ și $\mu(2_3) = w_3$, să fie cvasiomomorfism de stânga natural exact.

Vom obține $\mu(2_1 \cdot 2_1) = w_1^{2_1} w_1 = w_0 = \mu(1)$ și $\mu(2_2 \cdot 2_2) = w_2^{2_2} w_2 = w_0 = \mu(1)$. Mai mult decât atât, $\mu(2_1 \cdot 2_2) = w_1^{2_2} w_2 = w_3 = \mu(2_3) = \mu(2_2 \cdot 2_1) = w_2^{2_1} w_1$. Notând $w_1 =< r_1, r_2, r_3, r_4 >$, vom avea: $w_1^{2_1} =< r_2, r_1, r_4, r_3 >$, $w_1^{2_2} =< r_3, r_4, r_1, r_2 >$ și $w_1^{2_3} =< r_4, r_3, r_2, r_1 >$. Dacă $w_2 =< q_1, q_2, q_3, q_4 >$, atunci $w_2^{2_1} =< q_2, q_1, q_4, q_3 >$, $w_2^{2_2} =< q_3, q_4, q_1, q_2 >$ și $w_2^{2_3} =< q_4, q_3, q_2, q_1 >$. Din relațiile $w_1^{2_1} w_1 = w_0$ și $w_2^{2_2} w_2 = w_0$ urmează că $r_1 r_2 = e$, $r_3 r_4 = e$ și, respectiv, $q_1 q_3 = e$, $q_2 q_4 = e$. Prin urmare, pentru w_1 și w_2 sunt valabile următoarele variante: $w_1 =< p,p,p,p >$, $w_1' =< e,e,p,p >$, $w_1'' =< p,p,e,e >$ și, respectiv, $w_2 =< p,p,p,p >$, $w_2' =< e,p,e,p >$, $w_2'' =< p,e,p,e >$.

Nemijlocit se verifică că din 9 variante de completare a submulțimilor a câte 3 elemente (obținute mai sus) cu elementul al patrulea w_3, astfel ca aplicația μ să fie cvasiomomorfism de stânga natural exact, apoi numai 5 din ele dau răspunsuri pozitive. Deci, vom avea următoarele rezultate concrete: $W_1' = (w_0, w_1)$, $W_2' = (w_0, w_1', w_2', w_3 =< p,e,e,p >)$, $W_3' = (w_0, w_1'', w_2'', w_3)$, $W_4' = (w_0, w_1', w_2'', w'_3 =< e,p,p,e >)$ și $W_5' = (w_0, w_1'', w_2', w'_3)$. Ca rezultat se obțin: a) un grup W_1' −semiminor; b) 4 grupuri W_i' −pseudominore. Grupurile obținute vor avea simbolurile polinomiale: a) $\overleftarrow{2:2}/(2|W_1'|W_1'; 2:2/2/2)$, care formal nu se deosebește de grupul minor de P −simetrie cu simbolul binomial $2:2/2$; b) $\overleftarrow{2:2}/(2|W_i'|w_0; 1/1/1)$, unde $i = 2,3,4,5$.

Referinţe:

1. КУРОШ, А.Г. *Теория групп.* Москва: Наука, 1967.
2. ХОЛ, М. *Теория групп.* Москва: ИЛ, 1962.
3. КАРГАПОЛОВ, М.И., МЕРЗЛЯКОВ, Ю.И. *Основы теории групп.* Москва: Наука, 1977.
4. КОПЦИК, В.А., КОЦЕВ, И.Н. К теории и классификации групп цветной симметрии. II. *W*-симметрия. В: *Сообщения ОИЯИ*, Р4-8068. Дубна, 1974.
5. LUNGU, A.P. Classification of groups of *W*-symmetry. (Russian). In: *Studies in modern algebra and geometry.* Chisinau: Shtiintsa, 1983, p.79-84.
6. ЗАМОРЗАЕВ, А.М., КАРПОВА, Ю.С, ЛУНГУ, А.П., ПАЛИСТРАНТ, А.Ф. *Р-симметрия и ее дальнейшее развитие*. Кишинев: Штиинца, 1986. 156 с.
7. ЛУНГУ, А.П. К теории групп *W*-симметрии. В: *Известия АН Республики Молдова. Математика*, 1992, №3(9), с.72-81.
8. LUNGU, A. Aplicaţii cvasiomomorfe şi produse semidirecte de grupuri. În: *Materialele Conferinţei ştiinţifice jubiliare.* Chişinău: USM, 1996, p.22-24.
9. ЛУНГУ, А.П. Универсальная методика вывода конечных групп W_p-симметрии. В: *Anale Ştiinţifice ale USM.* Seria *„Ştiinţe reale”*. Chişinău, 1997, p.16-22.

Notă: *Lucrarea a fost elaborată în cadrul Proiectului 15.817.02.26F.*

Prezentat la 30.09.2016